

Loi binomiale — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Combien de pièces défectueuses trouvera-t-on dans un échantillon ? Quelle note obtient-on en répondant au hasard à un QCM ? Combien d'appels faut-il passer pour être presque sûr de conclure une vente ? La loi binomiale répond à toutes ces questions de Terminale STMG. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre : espérance d'une variable aléatoire et jeu équitable, schéma de Bernoulli et arbres, coefficients binomiaux lus dans le triangle de Pascal, calcul de $P(X = k)$, « au moins un » par l'événement contraire, puis espérance np . Les derniers exercices sont des problèmes complets de type bac.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/loi-binomiale

Exercice 1 - Calculer une espérance

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3 avec les probabilités 0,2, 0,4, 0,3 et 0,1. Calcule $E(X)$.

Exercice 2 - Un jeu équitable

On lance un dé équilibré ; on gagne 12 € si l'on obtient 6, rien sinon. Quelle mise rend le jeu équitable ?

Exercice 3 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Parmi ces expériences, lesquelles sont des épreuves de Bernoulli ? a) Lancer une pièce et noter pile ou face. b) Lancer un dé et noter le résultat. c) Interroger un client et noter s'il est satisfait (probabilité 0,85).

Exercice 4 - Deux épreuves sur un arbre

On répète deux fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4. Donne la loi du nombre X de succès.

Exercice 5 - Les valeurs immédiates

Sans triangle de Pascal, donne $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{6}$ et $\binom{7}{7}$.

Exercice 6 - Lire le triangle de Pascal

La ligne 5 du triangle de Pascal est 1 5 10 10 5 1. Donne $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$, puis interprète $\binom{5}{2}$ avec un arbre.

Exercice 7 - La formule de Pascal

À l'aide de la ligne 5 (1 5 10 10 5 1), calcule $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$.

Exercice 8 - Reconnaître une loi binomiale

Une urne contient 4 boules rouges et 6 blanches. On tire 3 boules et l'on compte les rouges. Le nombre X de rouges suit-il une loi binomiale si l'on remet chaque boule ? si on ne la remet pas ?

Exercice 9 - Une loi binomiale complète

X suit la loi $B(3 ; 0,3)$. Donne sa loi complète.

Exercice 10 - Au moins une pièce défectueuse

Une machine produit 10 % de pièces défectueuses. On prélève 5 pièces (tirages assimilés à des tirages avec remise). Calcule la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse, puis d'en avoir au moins une.

Exercice 11 - L'espérance np

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On en contrôle 50. Combien de pièces défectueuses trouvera-t-on en moyenne ?

Exercice 12 - Utiliser un coefficient binomial

X suit la loi $B(5 ; 0,4)$. Calcule $P(X = 2)$, sachant que $\binom{5}{2} = 10$.

Exercice 13 - Répondre au hasard

Un QCM a 10 questions à 4 réponses, dont une seule est juste. Un élève répond au hasard. Calcule la probabilité qu'il n'ait aucune bonne réponse, puis exactement 3, avec $\binom{10}{3} = 120$.

Exercice 14 - Au plus une erreur

Une imprimante fait une erreur sur 5 % des pages, indépendamment. On imprime 8 pages. Calcule la probabilité d'avoir au plus une page avec une erreur, puis au moins deux.

Exercice 15 - Des lancers francs

Un joueur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,6, indépendamment. Il en tire 7. Calcule la probabilité qu'il en réussisse au moins 6.

Exercice 16 - Une espérance qui détrompe

Un ticket à gratter coûte 2 €. Il fait gagner 10 € avec la probabilité 0,05, 50 € avec la probabilité 0,01, et rien sinon. Calcule l'espérance du gain net.

Exercice 17 - Repérer une erreur sur l'espérance

Pour X de loi $B(40; 0,05)$, un élève écrit $E(X) = \frac{0,05}{40}$. Corrige.

Exercice 18 - Combien d'appels ?

Un commercial conclut une vente à chaque appel avec la probabilité 0,1, indépendamment. Combien d'appels doit-il passer pour avoir au moins 95 % de chances de conclure au moins une vente ?

Exercice 19 - Problème : la surréservation

Un avion a 50 places ; la compagnie vend 52 billets. Chaque passager se présente avec la probabilité 0,95, indépendamment des autres. On note X le nombre de passagers présents.

1. Calcule $E(X)$.
2. Calcule la probabilité que des passagers soient refusés, c'est-à-dire $P(X \geq 51)$.

Exercice 20 - Problème : un centre d'appels

Chaque appel d'un conseiller aboutit à une vente avec la probabilité 0,2, indépendamment. Il passe 10 appels par heure ; X est le nombre de ventes en une heure.

1. Donne la loi de X et son espérance.
2. Calcule $P(X = 2)$, avec $\binom{10}{2} = 45$, puis $P(X = 0)$.
3. Combien d'appels faut-il pour avoir au moins 99 % de chances de vendre au moins une fois ?

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Calculer une espérance

$$E(X) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1.$$

$$E(X) = 0 + 0,4 + 0,6 + 0,3 = 1,3.$$

Sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs de X se rapproche de 1,3.

Réponse. $E(X) = 1,3$.

Rappel de cours. $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$.

Correction de l'exercice 2 - Un jeu équitable

$$\text{Le gain brut moyen vaut } 12 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{6} = 2 \text{ €}.$$

Le jeu est équitable si le gain net moyen est nul, c'est-à-dire si la mise vaut 2 €.

Réponse. Une mise de 2 €.

Correction de l'exercice 3 - Reconnaître une épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli a exactement deux issues.

a) Oui, de paramètre $p = 0,5$ (succès : « pile »). c) Oui, de paramètre $p = 0,85$.

b) Non : six issues sont possibles.

Réponse. a) et c).

Correction de l'exercice 4 - Deux épreuves sur un arbre

$$P(X = 2) = 0,4^2 = 0,16 \text{ (un chemin).}$$

$$P(X = 1) = 2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48 \text{ (deux chemins).}$$

$$P(X = 0) = 0,6^2 = 0,36. \text{ Contrôle : } 0,16 + 0,48 + 0,36 = 1.$$

Réponse. 0,36 ; 0,48 ; 0,16.

Correction de l'exercice 5 - Les valeurs immédiates

Un seul chemin sans succès et un seul avec uniquement des succès : $\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$.

Un chemin à un succès est fixé par la place de ce succès : $\binom{7}{1} = 7$.

Par symétrie, $\binom{7}{6} = \binom{7}{1} = 7$ (on choisit la place de l'unique échec).

Réponse. 1 ; 7 ; 7 ; 1.

Correction de l'exercice 6 - Lire le triangle de Pascal

On lit $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{3} = 10$.

Dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli à 5 épreuves, 10 chemins comportent exactement 2 succès.

L'égalité $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ traduit la symétrie : 2 succès, c'est 3 échecs.

Réponse. $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

Correction de l'exercice 7 - La formule de Pascal

Formule de Pascal : $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$.

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20.$$

Chaque nombre du triangle est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui.

Réponse. 15 et 20.

Rappel de cours. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Correction de l'exercice 8 - Reconnaître une loi binomiale

Avec remise, les 3 tirages sont identiques ($p = 0,4$) et indépendants : X suit la loi $B(3; 0,4)$.

Sans remise, la probabilité de tirer une rouge change d'un tirage à l'autre : les tirages ne sont pas indépendants, X ne suit pas une loi binomiale.

Réponse. Avec remise : $B(3; 0,4)$; sans remise : non.

Correction de l'exercice 9 - Une loi binomiale complète

La ligne 3 du triangle est 1 3 3 1.

$$P(X = 0) = 0,7^3 = 0,343 ; P(X = 1) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2 = 0,441.$$

$$P(X = 2) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189 ; P(X = 3) = 0,3^3 = 0,027.$$

Contrôle : la somme vaut 1.

Réponse. 0,343 ; 0,441 ; 0,189 ; 0,027.

Correction de l'exercice 10 - Au moins une pièce défectueuse

Le nombre X de pièces défectueuses suit la loi $B(5; 0,1)$.

$$P(X = 0) = 0,9^5 \approx 0,5905.$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,4095.$$

Réponse. $\approx 0,5905$; $\approx 0,4095$.

Rappel de cours. « Au moins un » : passer par l'événement contraire « aucun ».

Correction de l'exercice 11 - L'espérance np

Le nombre X de pièces défectueuses suit la loi $B(50; 0,04)$.

$$E(X) = n \times p = 50 \times 0,04 = 2.$$

En moyenne, sur un grand nombre de contrôles, on trouve 2 pièces défectueuses sur 50.

Réponse. 2 en moyenne.

Correction de l'exercice 12 - Utiliser un coefficient binomial

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^3.$$

$$P(X = 2) = 10 \times 0,16 \times 0,216 = 0,3456.$$

Réponse. $P(X = 2) = 0,3456$.

Rappel de cours. $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

Erreur fréquente. Oublier le coefficient $\binom{5}{2}$: on obtiendrait la probabilité d'un seul chemin, 0,03456.

Correction de l'exercice 13 - Répondre au hasard

Le nombre X de bonnes réponses suit la loi $B(10; 0,25)$.

$$P(X = 0) = 0,75^{10} \approx 0,0563.$$

$$P(X = 3) = 120 \times 0,25^3 \times 0,75^7 \approx 0,2503.$$

Réponse. $\approx 0,0563$; $\approx 0,2503$.

Correction de l'exercice 14 - Au plus une erreur

X suit la loi $B(8; 0,05)$.

$P(X \leq 1) = 0,95^8 + 8 \times 0,05 \times 0,95^7 \approx 0,6634 + 0,2793$, soit environ 0,9428 sans arrondi intermédiaire.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,0572.$$

Réponse. $\approx 0,9428$; $\approx 0,0572$.

Correction de l'exercice 15 - Des lancers francs

X suit la loi $B(7; 0,6)$.

$$P(X = 7) = 0,6^7 \approx 0,0280 \text{ et } P(X = 6) = 7 \times 0,6^6 \times 0,4 \approx 0,1306.$$

$$P(X \geq 6) \approx 0,0280 + 0,1306 = 0,1586.$$

Réponse. $\approx 0,1586$.

Correction de l'exercice 16 - Une espérance qui détrompe

Le gain net vaut 8, 48 ou -2 avec les probabilités 0,05, 0,01 et 0,94.

$$E(G) = 8 \times 0,05 + 48 \times 0,01 - 2 \times 0,94 = 0,4 + 0,48 - 1,88 = -1.$$

Un joueur perd en moyenne 1 € par ticket, soit la moitié de sa mise.

Réponse. $E(G) = -1$ €.

Correction de l'exercice 17 - Repérer une erreur sur l'espérance

L'espérance d'une loi binomiale est le produit np : $E(X) = 40 \times 0,05 = 2$.

Bon sens : 5 % de 40 essais donnent en moyenne 2 succès ; un résultat plus petit que p ne peut pas convenir.

Réponse. $E(X) = 2$.

Correction de l'exercice 18 - Combien d'appels ?

Avec n appels, $P(X \geq 1) = 1 - 0,9^n$. On veut $1 - 0,9^n \geq 0,95$, soit $0,9^n \leq 0,05$.

Avec le logarithme décimal : $n \log(0,9) \leq \log(0,05)$, et comme $\log(0,9) < 0$,
 $n \geq \frac{\log(0,05)}{\log(0,9)} \approx 28,4$.

Il faut au moins 29 appels. Vérification : $1 - 0,9^{28} \approx 0,948$ et $1 - 0,9^{29} \approx 0,953$.

Réponse. Au moins 29 appels.

Correction de l'exercice 19 - Problème : la surréservation

X suit la loi $B(52; 0,95)$, et $E(X) = 52 \times 0,95 = 49,4$.

$P(X = 52) = 0,95^{52} \approx 0,0694$ et $P(X = 51) = 52 \times 0,95^{51} \times 0,05 \approx 0,1901$.

$P(X \geq 51) \approx 0,2595$: dans environ un vol sur quatre, au moins un passager sera refusé.

Réponse. $E(X) = 49,4$; $P(X \geq 51) \approx 0,2595$.

Correction de l'exercice 20 - Problème : un centre d'appels

X suit la loi $B(10; 0,2)$, et $E(X) = 10 \times 0,2 = 2$ ventes par heure en moyenne.

$P(X = 2) = 45 \times 0,2^2 \times 0,8^8 \approx 0,302$ et $P(X = 0) = 0,8^{10} \approx 0,107$.

On veut $0,8^n \leq 0,01$, soit $n \geq \frac{\log(0,01)}{\log(0,8)} \approx 20,6$: il faut au moins 21 appels.

Réponse. $B(10; 0,2)$, $E(X) = 2$; $\approx 0,302$ et $\approx 0,107$; 21 appels.