

Probabilités conditionnelles — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un test positif signifie-t-il qu'on est malade ? Quelle part des pièces défectueuses vient de la machine la plus ancienne ? Les probabilités conditionnelles répondent à ces questions, au cœur de l'épreuve de Terminale STMG. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre : lire $P_A(B)$ dans un tableau croisé ou une phrase, construire un arbre pondéré, multiplier le long d'un chemin, appliquer la formule des probabilités totales, « inverser » un conditionnement, puis reconnaître deux événements indépendants. Les derniers exercices sont des problèmes complets de type bac.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/probabilites-conditionnelles

Exercice 1 - Lire un tableau croisé

Une boutique a reçu 200 clients : 80 hommes, dont 48 ont acheté en ligne, et 120 femmes, dont 72 ont acheté en ligne. On choisit un client au hasard ; on note H « c'est un homme » et L « il a acheté en ligne ». Calcule $P(H \cap L)$, $P_H(L)$ et $P_L(H)$.

Exercice 2 - Appliquer la définition

On sait que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,15$. Calcule $P_A(B)$ et $P_A(\overline{B})$.

Exercice 3 - Traduire un énoncé

On choisit au hasard un salarié d'une entreprise ; F : « il suit une formation », C : « il est cadre ». Traduis : a) 25 % des salariés sont cadres ; b) 60 % des cadres suivent une formation ; c) 15 % des salariés sont des cadres en formation.

Exercice 4 - Calculer une intersection

35 % des clients d'une banque ont un crédit immobilier ; parmi eux, 60 % ont aussi une assurance habitation dans la banque. Quelle est la probabilité qu'un client ait un crédit immobilier et une assurance habitation ?

Exercice 5 - Deux conditionnements différents

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. T : « c'est un trèfle » ; F : « c'est une figure » (valet, dame ou roi). Calcule $P_T(F)$ et $P_F(T)$.

Exercice 6 - Construire un arbre

35 % des visiteurs d'un site créent un compte (A). 60 % de ceux qui ont un compte achètent (B), contre 20 % des autres. Décris l'arbre pondéré et calcule la probabilité de chacun des quatre chemins.

Exercice 7 - La probabilité totale

Avec l'arbre de l'exercice précédent ($P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,6$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$), calcule la probabilité qu'un visiteur achète.

Exercice 8 - Inverser le conditionnement

Toujours avec $P(A \cap B) = 0,21$ et $P(B) = 0,34$: un visiteur a acheté. Quelle est la probabilité qu'il ait un compte ?

Exercice 9 - Compléter un arbre

Dans un arbre « A puis B », on connaît $P(\bar{A}) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,25$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. Donne toutes les autres pondérations, puis $P(A \cap B)$.

Exercice 10 - Un tirage sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules bleues. On tire successivement deux boules sans remise. Calcule la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

Exercice 11 - Tester une indépendance

On sait que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,15$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 12 - D'où viennent les défauts ?

Une machine ancienne produit 25 % des pièces, avec 8 % de défauts ; une machine récente produit le reste, avec 3 % de défauts.

1. Calcule la proportion de pièces défectueuses.
2. Une pièce est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine ancienne ?

Exercice 13 - Trois fournisseurs

Trois fournisseurs livrent 50 %, 30 % et 20 % des colis, avec des taux de retard de 6 %, 5 % et 10 %.

1. Quelle est la probabilité qu'un colis soit en retard ?
2. Un colis est en retard : quelle est la probabilité qu'il vienne du troisième fournisseur ?

Exercice 14 - Un test de dépistage

Une maladie touche 1 % de la population. Le test est positif chez 90 % des malades et chez 5 % des personnes saines.

1. Calcule la probabilité qu'un test soit positif.
2. Le test est positif : quelle est la probabilité d'être malade ? Commente.

Exercice 15 - Une indépendance dans un tableau

On reprend la boutique de l'exercice 1 : 200 clients, 80 hommes dont 48 acheteurs en ligne, 120 femmes dont 72 acheteuses en ligne. Les événements H et L sont-ils indépendants ?

Exercice 16 - Incompatibles ou indépendants ?

On lance un dé équilibré. A : « on obtient 1 ou 2 » ; B : « on obtient 6 ». Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 17 - Retrouver $P(A)$

On sait que $P_A(B) = 0,9$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$ et $P(B) = 0,6$. Calcule $P(A)$.

Exercice 18 - Deux contrôles indépendants

Deux contrôles indépendants détectent un défaut avec les probabilités 0,85 et 0,9. On considère une pièce défectueuse.

1. Quelle est la probabilité que les deux contrôles détectent le défaut ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un contrôle le détecte ?

Exercice 19 - Problème : une campagne d'e-mails

Une enseigne envoie un e-mail promotionnel. 40 % des clients l'ouvrent (O). 15 % de ceux qui l'ouvrent achètent (A), contre 2 % de ceux qui ne l'ouvrent pas.

1. Calcule la probabilité qu'un client achète.
2. Un client a acheté : quelle est la probabilité qu'il ait ouvert l'e-mail ?
3. Les événements O et A sont-ils indépendants ?

Exercice 20 - Problème : une question sensible

Pour savoir quelle proportion p d'élèves a déjà copié sur un voisin, chacun lance une pièce en secret : sur « pile », il répond honnêtement ; sur « face », il répond « oui » quoi qu'il arrive. On obtient 62 % de « oui ».

1. Exprime la probabilité de répondre « oui » en fonction de p .
2. Estime p .

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau croisé

$$P(H \cap L) = \frac{48}{200} = 0,24 : \text{on divise par l'effectif total.}$$

$$P_H(L) = \frac{48}{80} = 0,6 : \text{parmi les hommes.}$$

120 clients ont acheté en ligne ($48 + 72$), donc $P_L(H) = \frac{48}{120} = 0,4$: parmi les acheteurs en ligne.

Réponse. 0,24 ; 0,6 ; 0,4.

Rappel de cours. $P_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$: l'événement « sachant » donne le dénominateur.

Correction de l'exercice 2 - Appliquer la définition

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,5} = 0,3.$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 0,7.$$

Réponse. $P_A(B) = 0,3$; $P_A(\bar{B}) = 0,7$.

Correction de l'exercice 3 - Traduire un énoncé

a) La référence est l'ensemble des salariés : $P(C) = 0,25$.

b) La référence est l'ensemble des cadres : $P_C(F) = 0,6$.

c) La référence est l'ensemble des salariés, et l'on parle des cadres **et** en formation : $P(C \cap F) = 0,15$. On vérifie : $0,25 \times 0,6 = 0,15$.

Réponse. $P(C) = 0,25$; $P_C(F) = 0,6$; $P(C \cap F) = 0,15$.

Correction de l'exercice 4 - Calculer une intersection

On note I « crédit immobilier » et A « assurance habitation » : $P(I) = 0,35$ et $P_I(A) = 0,6$.

$$P(I \cap A) = P(I) \times P_I(A) = 0,35 \times 0,6 = 0,21.$$

Réponse. 0,21.

Correction de l'exercice 5 - Deux conditionnements différents

Il y a 8 trèfles, 12 figures et 3 figures de trèfle.

$$P_T(F) = \frac{3}{8} = 0,375 : \text{parmi les 8 trèfles, 3 figures.}$$

$$P_F(T) = \frac{3}{12} = 0,25 : \text{parmi les 12 figures, 3 trèfles. Inverser le conditionnement change le résultat.}$$

Réponse. $P_T(F) = 0,375$; $P_F(T) = 0,25$.

Correction de l'exercice 6 - Construire un arbre

Premier niveau : $P(A) = 0,35$, $P(\bar{A}) = 0,65$. Second niveau : $P_A(B) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,4$,

$$P_{\bar{A}}(B) = 0,2, P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8.$$

$$P(A \cap B) = 0,35 \times 0,6 = 0,21 ; P(A \cap \bar{B}) = 0,35 \times 0,4 = 0,14.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,65 \times 0,2 = 0,13 ; P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,65 \times 0,8 = 0,52.$$

$$\text{Contrôle : } 0,21 + 0,14 + 0,13 + 0,52 = 1.$$

Réponse. 0,21 ; 0,14 ; 0,13 ; 0,52.

Rappel de cours. Probabilité d'un chemin = produit des probabilités de ses branches.

Correction de l'exercice 7 - La probabilité totale

A et $\bar{A}$ forment une partition : deux chemins mènent à B .

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,21 + 0,13 = 0,34.$$

Réponse. $P(B) = 0,34$.

Rappel de cours. $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Correction de l'exercice 8 - Inverser le conditionnement

$$\text{On cherche } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$$P_B(A) = \frac{0,21}{0,34} \approx 0,618.$$

Environ 62 % des acheteurs ont un compte, alors que seulement 35 % des visiteurs en ont un.

Réponse. $P_B(A) \approx 0,618$.

Correction de l'exercice 9 - Compléter un arbre

$$\text{Règle des nœuds : } P(A) = 1 - 0,6 = 0,4 ; P_A(B) = 1 - 0,25 = 0,75 ; P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

$$P(A \cap B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3.$$

Réponse. $P(A) = 0,4 ; P_A(B) = 0,75 ; P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5 ; P(A \cap B) = 0,3$.

Correction de l'exercice 10 - Un tirage sans remise

$$\text{Au premier tirage, } P(R_1) = \frac{4}{6}.$$

$$\text{Si la première est rouge, il reste 3 rouges sur 5 boules : } P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{5}.$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0,4.$$

Réponse. 0,4.

Correction de l'exercice 11 - Tester une indépendance

$$\text{On compare } P(A \cap B) \text{ au produit } P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15.$$

Les deux sont égaux : A et B sont indépendants.

$$\text{On le vérifie aussi avec } P_A(B) = \frac{0,15}{0,5} = 0,3 = P(B).$$

Réponse. Oui : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Rappel de cours. A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Correction de l'exercice 12 - D'où viennent les défauts ?

Avec A « machine ancienne » et D « défectueuse » :

$$P(D) = 0,25 \times 0,08 + 0,75 \times 0,03 = 0,02 + 0,0225 = 0,0425.$$

$$P_D(A) = \frac{0,02}{0,0425} \approx 0,471.$$

La machine ancienne fait un quart des pièces mais près de la moitié des défauts.

Réponse. 0,0425 ; $\approx 0,471$.

Correction de l'exercice 13 - Trois fournisseurs

Partition en trois :

$$P(R) = 0,5 \times 0,06 + 0,3 \times 0,05 + 0,2 \times 0,1 = 0,03 + 0,015 + 0,02 = 0,065.$$

$$P_R(F_3) = \frac{0,02}{0,065} \approx 0,308.$$

Réponse. 0,065 ; $\approx 0,308$.

Correction de l'exercice 14 - Un test de dépistage

$$P(T) = 0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,05 = 0,009 + 0,0495 = 0,0585.$$

$$P_T(M) = \frac{0,009}{0,0585} \approx 0,154.$$

Seulement 15 % environ des tests positifs correspondent à des malades : la maladie est rare et les faux positifs sont nombreux.

Réponse. 0,0585 ; $\approx 0,154$.

Erreur fréquente. Confondre $P_M(T) = 0,9$ avec $P_T(M)$.

Correction de l'exercice 15 - Une indépendance dans un tableau

$$P_H(L) = \frac{48}{80} = 0,6 \text{ et } P(L) = \frac{120}{200} = 0,6.$$

$P_H(L) = P(L)$: les événements sont indépendants.

Chez les femmes aussi, $\frac{72}{120} = 0,6$: la proportion d'achats en ligne est la même dans les deux groupes.

Réponse. Oui : $P_H(L) = P(L) = 0,6$.

Correction de l'exercice 16 - Incompatibles ou indépendants ?

$A \cap B = \emptyset$: les événements sont incompatibles, et $P(A \cap B) = 0$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \neq 0 : \text{ils ne sont pas indépendants.}$$

Savoir que A est réalisé rend B impossible : c'est le contraire de l'indépendance.

Réponse. Incompatibles, mais pas indépendants.

Correction de l'exercice 17 - Retrouver $P(A)$

On note $x = P(A)$. Probabilités totales : $0,9x + 0,4(1 - x) = 0,6$.

$$0,5x + 0,4 = 0,6, \text{ donc } x = 0,4.$$

$$\text{Contrôle : } 0,4 \times 0,9 + 0,6 \times 0,4 = 0,36 + 0,24 = 0,6.$$

Réponse. $P(A) = 0,4$.

Correction de l'exercice 18 - Deux contrôles indépendants

Par indépendance : $0,85 \times 0,9 = 0,765$.

Aucun ne détecte avec la probabilité $0,15 \times 0,1 = 0,015$ (les contraires sont aussi indépendants).

Au moins un contrôle détecte le défaut avec la probabilité $1 - 0,015 = 0,985$.

Réponse. 0,765 ; 0,985.

Correction de l'exercice 19 - Problème : une campagne d'e-mails

$P(A) = 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,02 = 0,06 + 0,012 = 0,072$.

$P_A(O) = \frac{0,06}{0,072} \approx 0,833$: cinq acheteurs sur six ont ouvert l'e-mail.

$P_O(A) = 0,15 \neq 0,072 = P(A)$: non indépendants. Ouvrir l'e-mail multiplie la probabilité d'achat par plus de 2 par rapport à la moyenne.

Réponse. 0,072 ; $\approx 0,833$; non.

Correction de l'exercice 20 - Problème : une question sensible

Arbre « pile / face » puis « oui / non » : $P(\text{oui}) = 0,5 \times p + 0,5 \times 1 = 0,5p + 0,5$.

$0,5p + 0,5 = 0,62 \Leftrightarrow 0,5p = 0,12 \Leftrightarrow p = 0,24$.

Environ 24 % des élèves ont déjà copié. Un « oui » ne trahit personne, puisqu'il peut venir de la pièce.

Réponse. $P(\text{oui}) = 0,5p + 0,5$; $p = 0,24$.