Statistiques à deux variables — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Deux colonnes de chiffres, et une question de gestion derrière : les dépenses publicitaires font-elles vraiment vendre ? le chiffre d'affaires suit-il une tendance régulière ? La statistique à deux variables répond en cherchant la droite qui passe au plus près du nuage de points — la fameuse droite des moindres carrés, que la calculatrice donne en quelques touches. Encore faut-il savoir ce qu'on en fait : son coefficient directeur se lit comme un rythme (« chaque millier d'euros de publicité rapporte 8 600 € de ventes »), ses prévisions valent beaucoup à l'intérieur du nuage et de moins en moins loin devant, et surtout elle n'est légitime que si les points sont réellement alignés. Ces 20 exercices installent le point moyen, l'ajustement à la calculatrice, le critère des moindres carrés, la distinction entre interpolation et extrapolation — et savent aussi dire quand la droite ne convient pas, résidus à l'appui.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/statistiques-deux-variables

Exercice 1 – Calculer le point moyen

Le tableau donne le nombre de commandes reçues par une entreprise selon le rang du mois : rang x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — commandes y : 12 ; 15 ; 19 ; 22 ; 26 ; 32.

1. Calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

2. Donne les coordonnées du point moyen G et explique ce qu'il représente.

Exercice 2 – Décrire un nuage de points

Trois nuages de points sont décrits ci-dessous. Pour chacun, dis si un ajustement affine semble pertinent, et si la tendance est croissante ou décroissante.

1. Nuage A : les points montent régulièrement et sont presque tous sur une même droite.

2. Nuage B : les points descendent régulièrement, avec de légers écarts de part et d'autre d'une droite.

3. Nuage C : les points forment un arc, montant d'abord doucement puis de plus en plus vite.

Exercice 3 – Utiliser une droite d'ajustement

Une droite d'ajustement du chiffre d'affaires d'un magasin, en milliers d'euros, a pour équation $y = 2{,}4x + 15$, où x est le rang de l'année ($x = 1$ pour 2019).

1. Estime le chiffre d'affaires en 2030.

2. Selon ce modèle, en quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 50 milliers d'euros ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Vérifier qu'une droite passe par G

Le tableau donne le nombre de visiteurs d'un site, en milliers, selon le rang du trimestre : x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 — y : 50 ; 58 ; 63 ; 72 ; 77. La calculatrice donne la droite d'ajustement $y = 6{,}8x + 50{,}4$.

1. Calcule les coordonnées du point moyen G.

2. Vérifie que la droite d'ajustement passe bien par G.

Exercice 5 – Interpréter le coefficient directeur

Trois ajustements affines ont été obtenus dans des contextes différents. Interprète le coefficient directeur de chacun, en une phrase concrète.

1. Chiffre d'affaires (milliers d'euros) selon le rang de l'année : $y = 3{,}2x + 45$.

2. Nombre d'invendus selon le rang du mois : $y = -1{,}5x + 40$.

3. Ventes (milliers d'euros) selon les dépenses publicitaires (milliers d'euros) : $y = 8{,}6x + 96$.

Exercice 6 – Droite des moindres carrés à la calculatrice

Le chiffre d'affaires d'une société, en milliers d'euros, est donné selon le rang de l'année : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 — y : 200 ; 215 ; 235 ; 250 ; 270.

1. Calcule le point moyen G.

2. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = 17{,}5x + 181{,}5$. Vérifie qu'elle passe par G.

3. Interprète le coefficient directeur.

Exercice 7 – Interpolation et extrapolation

On reprend l'ajustement $y = 17{,}5x + 181{,}5$ obtenu sur les rangs 1 à 5 (chiffre d'affaires en milliers d'euros).

1. Estime le chiffre d'affaires au rang 3,5. Comment s'appelle ce type d'estimation ?

2. Estime le chiffre d'affaires au rang 8. Comment s'appelle ce type d'estimation ?

3. Laquelle des deux estimations est la plus fiable ? Pourquoi ?

Exercice 8 – Le critère des moindres carrés

Pour la série x_i : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et y_i : 3 ; 5 ; 8 ; 9, on compare deux droites à l'aide de la somme des carrés des écarts $S = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$.

1. Calcule S pour la droite $D_1 : y = 2x + 1$.

2. Calcule S pour la droite des moindres carrés $D_2 : y = 2{,}1x + 1$.

3. Quelle droite ajuste le mieux le nuage ?

Exercice 9 – Déterminer une année de dépassement

On dispose de l'ajustement $y = 17{,}5x + 181{,}5$, où y est le chiffre d'affaires en milliers d'euros et x le rang de l'année, $x = 1$ correspondant à 2021.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Selon ce modèle, en quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 350 milliers d'euros ?

2. Quelle réserve faut-il formuler ?

Exercice 10 – Comparer valeur observée et valeur ajustée

Pour la série x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et y : 200 ; 215 ; 235 ; 250 ; 270, la droite d'ajustement est $y = 17{,}5x + 181{,}5$.

1. Calcule les valeurs prévues par la droite pour chaque rang.

2. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées, et commente.

Exercice 11 – Publicité et ventes : étude complète

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x (en milliers d'euros) et ses ventes y (en milliers d'euros) sur six périodes : x : 5 ; 8 ; 12 ; 15 ; 20 ; 25 — y : 120 ; 150 ; 190 ; 215 ; 265 ; 310. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx 9{,}49x + 73{,}86$.

1. Calcule le point moyen G et vérifie l'équation.

2. Le nuage est-il presque aligné ? Justifie à l'aide des accroissements $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entre points successifs.

3. Interprète le coefficient directeur, puis estime les ventes pour 30 milliers d'euros de publicité.

Exercice 12 – Choisir entre deux études

Deux services d'une entreprise ont chacun réalisé une étude, sur les mêmes 8 mois. Le service commercial obtient $y = 4{,}2x + 30$, avec un nuage presque aligné et une somme des carrés des écarts $S = 12$. Le service des ressources humaines obtient $y = 6{,}8x + 12$, avec un nuage très dispersé et $S = 310$.

1. Laquelle des deux droites peut servir à faire des prévisions ? Justifie.

2. Le directeur remarque que le second coefficient directeur est plus grand et en conclut que la seconde relation est « plus forte ». Que lui répondre ?

Exercice 13 – Passer des années aux rangs

Le nombre d'adhérents d'une association est : 2 019 → 340 ; 2 020 → 372 ; 2 021 → 398 ; 2 022 → 431 ; 2 023 → 459. On pose x = année − 2018.

1. Donne la série des rangs et calcule le point moyen.

2. La calculatrice donne $y = 29{,}7x + 310{,}9$. Estime le nombre d'adhérents en 2028.

3. Pourquoi travaille-t-on avec des rangs plutôt qu'avec les années ?

Exercice 14 – Quand la droite ne convient pas

Le nombre d'utilisateurs d'une application, en milliers, est : x (rang du trimestre) : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — y : 100 ; 110 ; 121 ; 133 ; 146 ; 161. La calculatrice donne $y \approx 12{,}14x + 86$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées.

2. Que révèle la répartition de ces écarts ?

3. Calcule les quotients successifs $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ et propose un meilleur modèle.

Exercice 15 – Ce qu'un ajustement affine dit des pourcentages

Un chiffre d'affaires, en milliers d'euros, est ajusté par la droite $y = 17{,}5x + 181{,}5$, où x est le rang de l'année.

1. Calcule les valeurs ajustées aux rangs 1, 2, 5, 7 et 8.

2. Calcule le taux d'évolution prévu du rang 1 au rang 2, puis du rang 7 au rang 8. Que constates-tu ?

3. Calcule le taux d'évolution global du rang 1 au rang 5, puis le taux annuel moyen correspondant.

Exercice 16 – Type bac : chiffre d'affaires d'une entreprise

Le chiffre d'affaires d'une entreprise, en milliers d'euros, est donné selon le rang x de l'année ($x = 1$ pour 2024) : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — y : 340 ; 368 ; 401 ; 425 ; 458 ; 488. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx 29{,}54x + 309{,}93$.

1. Calcule le point moyen G et contrôle l'équation.

2. L'ajustement affine est-il justifié ?

3. Interprète le coefficient directeur.

4. Estime le chiffre d'affaires de 2032.

5. En quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 600 milliers d'euros ?

Exercice 17 – Type bac : rentabilité d'un budget publicitaire

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x et ses ventes y, en milliers d'euros : x : 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 — y : 180 ; 230 ; 265 ; 310 ; 355. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = 8{,}6x + 96$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen.

2. Interprète le coefficient directeur.

3. L'entreprise réalise une marge de 20 % sur ses ventes. Un millier d'euros de publicité supplémentaire est-il rentable ?

4. Estime les ventes pour un budget de 40 milliers d'euros et discute la fiabilité de cette estimation.

Exercice 18 – Type bac : ajustement affine ou modèle exponentiel ?

Le nombre d'abonnés d'un service, en milliers, est : x (rang de l'année, $x = 0$ pour 2025) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 — y : 50 ; 62 ; 78 ; 96 ; 120 ; 150. La calculatrice donne la droite $y \approx 19{,}77x + 43{,}24$.

1. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées.

2. Calcule les quotients successifs et propose un second modèle.

3. Compare les prévisions des deux modèles pour 2033 ($x = 8$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Quel modèle retenir, et pourquoi ?

Exercice 19 – Type bac : baisse de consommation et limites du modèle

La consommation d'énergie d'un site industriel, en MWh, est : x (rang de l'année) : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 — y : 480 ; 465 ; 447 ; 432 ; 415 ; 401 ; 384. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = -16x + 496$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen.

2. Interprète le coefficient directeur et justifie que le nuage est presque aligné.

3. Estime la consommation au rang 12.

4. À partir de quel rang la consommation passerait-elle sous 300 MWh ?

5. Que prévoit le modèle au rang 31 ? Qu'en conclure ?

Exercice 20 – Type bac : synthèse, prix et recette optimale

Une entreprise a testé cinq prix de vente x (en euros) et relevé les quantités vendues y (en milliers d'unités) : x : 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 — y : 95 ; 82 ; 70 ; 56 ; 47. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = -2{,}44x + 143{,}2$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen et juge l'alignement du nuage.

2. Interprète le coefficient directeur.

3. Estime les quantités vendues pour un prix de 45 €.

4. Exprime la recette $R(x)$ en fonction du prix, puis détermine le prix qui maximise la recette.

5. Quelle recette maximale l'entreprise peut-elle espérer ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer le point moyen

$\overline{x}$ est la moyenne des rangs : $\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$.

$\overline{y}$ est la moyenne des commandes : $\overline{y} = \dfrac{12+15+19+22+26+32}{6}$.

La somme vaut 12 + 15 = 27, +19 = 46, +22 = 68, +26 = 94, +32 = 126.

Donc $\overline{y} = \dfrac{126}{6} = 21$.

Le point moyen a pour coordonnées $G(3{,}5\,;21)$.

Il représente le « centre de gravité » du nuage : le point autour duquel les autres se répartissent.

Sa première coordonnée est le rang moyen (le milieu de la période observée), sa seconde la moyenne des commandes mensuelles.

Propriété essentielle à connaître : la droite des moindres carrés passe TOUJOURS par le point moyen G. C'est un contrôle très efficace pour vérifier une équation trouvée à la calculatrice.

Attention à la remarque : $\overline{x} = 3{,}5$ ne correspond à aucun mois réel. Ce n'est pas gênant — le point moyen est un repère de calcul, pas une observation.

Réponse. $\overline{x} = 3{,}5$ et $\overline{y} = 21$ · point moyen $G(3{,}5\,;21)$, centre du nuage par lequel passe toujours la droite d'ajustement.

Rappel de cours. $G(\overline{x}\,;\overline{y})$. La droite des moindres carrés passe obligatoirement par G.

Erreur fréquente. Calculer la moyenne des y en divisant par le nombre de valeurs différentes. On divise toujours par l'effectif total, ici 6.

Correction de l'exercice 2 – Décrire un nuage de points

La question à se poser devant un nuage est toujours la même : les points sont-ils sensiblement ALIGNÉS ?

Nuage A : les points sont presque alignés et montent. Un ajustement affine est pertinent, avec un coefficient directeur POSITIF.

Nuage B : les points sont alignés à quelques écarts près, et descendent. L'ajustement affine est pertinent, avec un coefficient directeur NÉGATIF.

Nuage C : les points ne sont PAS alignés, ils décrivent une courbe. Un ajustement affine n'est pas pertinent.

Une droite tracée sur ce nuage passerait au-dessus des points au milieu et en dessous aux deux extrémités : les écarts seraient systématiques, pas aléatoires.

Un tel nuage relève plutôt d'un modèle exponentiel : on le redresse par le changement de variable $z = \ln(y)$, puis on ajuste z en fonction de x.

Point de méthode à retenir : la calculatrice donne TOUJOURS une droite d'ajustement, même sur un nuage en arc. C'est à nous de juger si elle a un sens.

Réponse. A : ajustement affine pertinent, tendance croissante · B : ajustement affine pertinent, tendance décroissante · C : ajustement affine NON pertinent (nuage incurvé, modèle exponentiel à envisager).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Avant tout calcul : regarder le nuage. Une droite ne convient que si les points sont sensiblement alignés.

Erreur fréquente. Calculer une droite d'ajustement sur le nuage C parce que la calculatrice le permet. Elle donnerait des prévisions systématiquement fausses.

Correction de l'exercice 3 – Utiliser une droite d'ajustement

Il faut d'abord traduire l'année en rang. Si $x = 1$ correspond à 2019, alors le rang s'obtient par $x = \text{année} - 2018$.

Pour 2030 : $x = 2030 - 2018 = 12$.

$y = 2{,}4 \times 12 + 15 = 28{,}8 + 15 = 43{,}8$.

Le chiffre d'affaires estimé pour 2030 est donc de 43,8 milliers d'euros, soit 43 800 €.

Pour la seconde question, on résout $2{,}4x + 15 > 50$.

$2{,}4x > 35$, donc $x > \dfrac{35}{2{,}4} \approx 14{,}58$.

Comme x est un rang entier, le premier qui convient est $x = 15$.

On revient à l'année : année $= x + 2018 = 15 + 2018 = 2033$.

Vérification : pour $x = 14$, $y = 33{,}6 + 15 = 48{,}6$ (insuffisant) et pour $x = 15$, $y = 36 + 15 = 51$ (dépasse) ✔.

Le chiffre d'affaires dépasserait donc 50 milliers d'euros en 2033.

Réponse. 43,8 milliers d'euros en 2030 (rang 12) · le seuil de 50 milliers est franchi au rang 15, soit en 2033.

Rappel de cours. Toujours convertir l'année en RANG avant de remplacer dans l'équation, puis reconvertir le rang en année à la fin.

Erreur fréquente. Remplacer x par 2030 directement. On obtiendrait 4 887 milliers d'euros, un résultat évidemment absurde.

Correction de l'exercice 4 – Vérifier qu'une droite passe par G

$\overline{x} = \dfrac{0 + 1 + 2 + 3 + 4}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$.

$\overline{y} = \dfrac{50 + 58 + 63 + 72 + 77}{5}$.

Somme : $50 + 58 = 108$, $+63 = 171$, $+72 = 243$, $+77 = 320$.

$\overline{y} = \dfrac{320}{5} = 64$.

Le point moyen est donc $G(2\,;64)$.

Pour vérifier que la droite passe par G, on remplace x par 2 dans l'équation.

$y = 6{,}8 \times 2 + 50{,}4 = 13{,}6 + 50{,}4 = 64$.

On obtient exactement 64, qui est bien $\overline{y}$. La droite passe donc par G ✔.

Ce contrôle est très utile en examen : si le calcul ne redonne pas $\overline{y}$, c'est qu'il y a une erreur de saisie dans la calculatrice ou une erreur de recopie de l'équation.

Attention : ce contrôle valide l'équation, il ne dit rien de la QUALITÉ de l'ajustement. Une droite peut passer par G et coller très mal au nuage.

Réponse. $G(2\,;64)$ · en remplaçant x par 2, on trouve $y = 64 = \overline{y}$: la droite passe bien par G.

Rappel de cours. Contrôle systématique d'une équation d'ajustement : $a\overline{x} + b$ doit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

redonner exactement $\overline{y}$.

Erreur fréquente. Conclure que l'ajustement est « bon » parce que la droite passe par G. Toute droite des moindres carrés y passe, quelle que soit la dispersion du nuage.

Correction de l'exercice 5 – Interpréter le coefficient directeur

Le coefficient directeur indique de combien y varie quand x augmente de 1.

a) $a = 3{,}2$: chaque année qui passe, le chiffre d'affaires augmente en moyenne de 3,2 milliers d'euros, soit 3 200 €.

Le mot « en moyenne » est essentiel : la droite décrit une tendance, pas la valeur exacte de chaque année.

b) $a = -1{,}5$: chaque mois, le nombre d'invendus diminue en moyenne de 1,5 unité. Le coefficient est négatif, donc la tendance est à la baisse.

L'ordonnée à l'origine 40 correspond au niveau d'invendus au rang 0, c'est-à-dire avant le début de la période observée.

c) $a = 8{,}6$: chaque millier d'euros dépensé en publicité s'accompagne en moyenne de 8,6 milliers d'euros de ventes supplémentaires, soit 8 600 €.

Ici l'interprétation est directement utile à une décision : elle permet de comparer le coût de la publicité à son rendement apparent.

Réserve importante à connaître, surtout pour le c) : un ajustement montre une ASSOCIATION entre deux grandeurs, pas nécessairement une relation de cause à effet.

Une entreprise qui vend bien peut aussi se permettre plus de publicité : dans ce cas le lien existerait dans l'autre sens. Le calcul ne tranche pas cette question.

Réponse. a) le chiffre d'affaires progresse en moyenne de 3 200 € par an · b) les invendus diminuent en moyenne de 1,5 unité par mois · c) chaque millier d'euros de publicité s'accompagne en moyenne de 8 600 € de ventes en plus.

Rappel de cours. Le coefficient directeur se lit « pour 1 de plus en x, a de plus en y », avec les UNITÉS de l'énoncé.

Erreur fréquente. Affirmer que la publicité « cause » les ventes. Un ajustement, même excellent, ne démontre jamais une causalité.

Correction de l'exercice 6 – Droite des moindres carrés à la calculatrice

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

$$\overline{y} = \frac{200+215+235+250+270}{5} = \frac{1\,170}{5} = 234.$$

Le point moyen est $G(3\,;234)$.

Vérification : $17{,}5 \times 3 + 181{,}5 = 52{,}5 + 181{,}5 = 234$ ✔. La droite passe bien par G.

Interprétation du coefficient directeur : chaque année, le chiffre d'affaires progresse en moyenne de 17,5 milliers d'euros, soit 17 500 €.

Contrôle de vraisemblance sur les données : de la première à la cinquième année, le chiffre d'affaires est passé de 200 à 270, soit 70 milliers en 4 années.

Cela fait $\frac{70}{4} = 17{,}5$ milliers par an en moyenne — exactement le coefficient trouvé ✔.

Cette coïncidence n'est pas générale, mais elle se produit ici parce que le nuage est très régulier.

Rappel de manipulation : sur calculatrice, on saisit les x en liste 1 et les y en liste 2, puis

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

on demande une régression linéaire (menu « STAT » puis « CALC », option $ax + b$).

Réponse. $G(3\,;234)$ · $17{,}5 \times 3 + 181{,}5 = 234 = \overline{y}$ ✔ · le chiffre d'affaires progresse en moyenne de 17 500 € par an.

Rappel de cours. Les formules de a et b ne sont pas exigibles en STMG : la droite s'obtient à la calculatrice, et se contrôle par le passage en G.

Erreur fréquente. Recopier l'équation en inversant a et b : $y = 181{,}5x + 17{,}5$. Le test du point moyen le détecte immédiatement.

Correction de l'exercice 7 – Interpolation et extrapolation

Au rang 3,5 : $y = 17{,}5 \times 3{,}5 + 181{,}5 = 61{,}25 + 181{,}5 = 242{,}75$ milliers d'euros.

Le rang 3,5 est SITUÉ À L'INTÉRIEUR de la plage observée (1 à 5) : on parle d'INTERPOLATION.

Au rang 8 : $y = 17{,}5 \times 8 + 181{,}5 = 140 + 181{,}5 = 321{,}5$ milliers d'euros.

Le rang 8 est HORS de la plage observée : on parle d'EXTRAPOLATION.

L'interpolation est nettement plus fiable. On dispose de points observés de part et d'autre du rang 3,5, et l'on sait que la tendance est régulière sur cette zone.

L'extrapolation, au contraire, suppose que la tendance observée sur cinq ans se prolonge encore trois années. Rien dans les données ne le garantit.

Plus on s'éloigne du nuage, moins la prévision est fiable : au rang 20, la droite donnerait 531,5 milliers, une valeur que rien n'appuie.

Formulation attendue au bac : « sous réserve que la tendance se poursuive, le chiffre d'affaires serait d'environ 321 500 € », et non « il sera de 321 500 € ».

Cas concret où l'extrapolation échoue : une crise, un changement de réglementation ou l'arrivée d'un concurrent modifient la tendance sans prévenir. La droite, elle, continue de monter.

Réponse. Rang 3,5 : 242,75 milliers d'euros, c'est une INTERPOLATION · rang 8 : 321,5 milliers d'euros, c'est une EXTRAPOLATION · l'interpolation est plus fiable car elle reste à l'intérieur des données observées.

Rappel de cours. Interpolation = à l'intérieur du nuage (fiable). Extrapolation = au-delà (à assortir d'une réserve écrite).

Erreur fréquente. Présenter une extrapolation comme une certitude. Le bac attend systématiquement la mention « si la tendance se poursuit ».

Correction de l'exercice 8 – Le critère des moindres carrés

Pour D_1, les valeurs données par la droite sont 3 ; 5 ; 7 ; 9 : les écarts valent 0 ; 0 ; 1 ; 0, donc $S_1 = 1$.

Pour D_2, les valeurs sont 3,1 ; 5,2 ; 7,3 ; 9,4 : les écarts valent $-0{,}1$; $-0{,}2$; 0,7 ; $-0{,}4$.

$S_2 = 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}49 + 0{,}16 = 0{,}7$.

$S_2 < S_1$: la droite des moindres carrés ajuste mieux le nuage. C'est sa définition même : parmi toutes les droites, c'est celle qui rend S minimale.

D_1 passe exactement par trois points, mais son écart de 1 sur le troisième pèse lourd une fois élevé au carré.

Réponse. $S_1 = 1$ · $S_2 = 0{,}7$ · la droite des moindres carrés D_2.

Rappel de cours. Méthode des moindres carrés : la droite qui minimise $S = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Croire qu'une droite qui passe exactement par plusieurs points est forcément la meilleure.

Correction de l'exercice 9 – Déterminer une année de dépassement

On résout l'inéquation $17{,}5x + 181{,}5 > 350$.

$17{,}5x > 350 - 181{,}5$, soit $17{,}5x > 168{,}5$.

$x > \dfrac{168{,}5}{17{,}5} \approx 9{,}63$.

Comme x est un rang entier, le premier qui convient est $x = 10$.

Vérification : $x = 9$ donne $157{,}5 + 181{,}5 = 339$ (insuffisant) ; $x = 10$ donne $175 + 181{,}5 = 356{,}5$ (dépasse) ✔.

Conversion en année : $x = 1$ correspond à 2021, donc année $= x + 2020$.

Pour $x = 10$: l'année est $2020 + 10 = 2030$.

Le chiffre d'affaires dépasserait donc 350 milliers d'euros en 2030.

Réserve à formuler : le modèle a été construit sur les rangs 1 à 5, c'est-à-dire jusqu'en 2025. Prévoir 2030 relève de l'extrapolation sur cinq années supplémentaires.

Cette prévision n'est valable que si la tendance linéaire de +17 500 € par an se maintient — ce qu'aucune donnée ne garantit.

Rédaction attendue : « si la tendance observée se poursuit, le seuil serait franchi en 2030 ».

Réponse. $x > 9{,}63$, donc le premier rang entier est 10, soit l'année 2030 · réserve : c'est une extrapolation à cinq ans au-delà des données, valable seulement si la tendance se maintient.

Rappel de cours. Résoudre $ax + b > S$, prendre l'entier supérieur, puis convertir le rang en année. Et écrire la réserve.

Erreur fréquente. Arrondir 9,63 à 10 sans vérifier. Ici cela tombe juste, mais avec $x > 9{,}05$ la réponse serait aussi 10 : c'est toujours l'entier SUPÉRIEUR, jamais l'arrondi.

Correction de l'exercice 10 – Comparer valeur observée et valeur ajustée

Rang 1 : $17{,}5 + 181{,}5 = 199$. Observé : 200. Écart : $200 - 199 = +1$.

Rang 2 : $35 + 181{,}5 = 216{,}5$. Observé : 215. Écart : $-1{,}5$.

Rang 3 : $52{,}5 + 181{,}5 = 234$. Observé : 235. Écart : $+1$.

Rang 4 : $70 + 181{,}5 = 251{,}5$. Observé : 250. Écart : $-1{,}5$.

Rang 5 : $87{,}5 + 181{,}5 = 269$. Observé : 270. Écart : $+1$.

Les écarts (appelés résidus) sont tous compris entre $-1{,}5$ et $+1{,}5$ milliers d'euros, pour des valeurs de l'ordre de 200 à 270.

En pourcentage, cela représente moins de 0,8 % : l'ajustement est excellent.

Point important : les écarts alternent +, −, +, −, + sans aucune régularité de forme. C'est le signe d'un bon ajustement affine.

Si au contraire les écarts étaient tous positifs aux extrémités et tous négatifs au milieu, cela révélerait une COURBURE, et la droite serait à rejeter.

Contrôle supplémentaire : la somme des écarts vaut $1 - 1{,}5 + 1 - 1{,}5 + 1 = 0$. C'est une propriété générale de la droite des moindres carrés ✔.

Réponse. Valeurs ajustées : 199 ; 216,5 ; 234 ; 251,5 ; 269 · écarts : +1 ; −1,5 ; +1 ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$-1{,}5$; $+1$, tous très petits et sans forme régulière : l'ajustement est excellent.

Rappel de cours. Les écarts (résidus) doivent être petits ET répartis sans motif. Un motif en U révèle une courbure que la droite ne capte pas.

Erreur fréquente. Se contenter de la droite donnée par la calculatrice sans regarder les écarts. Une droite existe toujours, même pour un nuage courbe qu'elle décrit mal.

Correction de l'exercice 11 – Publicité et ventes : étude complète

$\overline{x} = \dfrac{5+8+12+15+20+25}{6} = \dfrac{85}{6} \approx 14{,}17.$

$\overline{y} = \dfrac{120+150+190+215+265+310}{6} = \dfrac{1\,250}{6} \approx 208{,}33.$

Le point moyen est donc $G(14{,}17\,;208{,}33)$ environ.

Vérification : $9{,}49 \times 14{,}17 + 73{,}86 \approx 134{,}47 + 73{,}86 \approx 208{,}33$ ✔, on retrouve bien $\overline{y}$.

Accroissements entre points successifs : $\dfrac{30}{3} = 10$; $\dfrac{40}{4} = 10$; $\dfrac{25}{3} \approx 8{,}33$; $\dfrac{50}{5} = 10$; $\dfrac{45}{5} = 9$. Ils restent proches de 9,5 : les six points sont presque alignés, avec une tendance croissante.

L'ajustement affine est ici pleinement justifié.

Coefficient directeur : $a \approx 9{,}49$. Chaque millier d'euros supplémentaire investi en publicité s'accompagne en moyenne de 9,49 milliers d'euros de ventes en plus, soit 9 490 €.

Ordonnée à l'origine : $b \approx 73{,}86$ représenterait les ventes sans aucune publicité, soit environ 73 860 €. Cette valeur est une extrapolation vers $x = 0$, hors du nuage : elle est indicative.

Estimation pour $x = 30$: $y \approx 9{,}49 \times 30 + 73{,}86 = 284{,}70 + 73{,}86 = 358{,}56$.

Les ventes estimées sont donc d'environ 358,6 milliers d'euros, soit près de 358 600 €.

Il s'agit d'une extrapolation modérée (le nuage s'arrête à 25) : elle reste raisonnable, mais mérite la réserve d'usage.

Réserve économique en plus : les rendements de la publicité finissent toujours par décroître. Le modèle linéaire prévoit un rendement constant, ce qui ne peut pas tenir indéfiniment.

Réponse. $G(14{,}17\,;208{,}33)$, l'équation le vérifie ✔ · accroissements proches de 9,5 : nuage presque aligné, ajustement affine justifié · 1 000 € de publicité s'accompagnent d'environ 9 490 € de ventes · pour 30 milliers de publicité, ventes estimées à ≈ 358,6 milliers d'euros.

Rappel de cours. Trois lectures d'une droite d'ajustement : a = rythme, b = valeur en $x = 0$ (souvent hors nuage), les écarts = qualité de l'alignement.

Erreur fréquente. Conclure que doubler la publicité doublera les ventes. Le modèle prévoit +9,49 par unité, pas une proportionnalité : à $x = 0$, les ventes ne sont pas nulles.

Correction de l'exercice 12 – Choisir entre deux études

La fiabilité d'un ajustement se juge sur l'alignement du nuage, c'est-à-dire sur les écarts entre les points et la droite, pas sur le coefficient directeur.

Étude commerciale : nuage presque aligné et $S = 12$, petite. Les points sont proches de la droite : l'ajustement est fiable.

Étude des ressources humaines : nuage dispersé et $S = 310$, plus de 25 fois plus grande. L'ajustement affine est douteux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Seule la première droite peut donc servir à faire des prévisions raisonnables.

Pour la seconde question, le directeur confond deux notions distinctes.

Le coefficient directeur a mesure la PENTE, c'est-à-dire l'ampleur de la variation de y quand x augmente de 1. Il dépend entièrement des unités choisies.

Illustration : si l'on exprimait la première série en euros au lieu de milliers d'euros, son coefficient directeur passerait de 4,2 à 4 200, sans que le nuage soit mieux ou moins bien aligné.

Réponse à formuler : une pente élevée ne garantit rien. Ici, la seconde relation a une pente plus forte mais des points très dispersés : ses prévisions seraient peu fiables.

Réponse. Seule l'étude commerciale (nuage aligné, $S = 12$) permet des prévisions fiables · le directeur confond pente et qualité : a dépend des unités, l'alignement se juge sur les écarts.

Rappel de cours. La pente dit de combien y varie ; les écarts au nuage disent si la droite décrit bien les données.

Erreur fréquente. Juger la qualité d'un ajustement sur la valeur de la pente.

Correction de l'exercice 13 – Passer des années aux rangs

Les rangs valent $x = 1$ pour 2019, 2 pour 2020, 3 pour 2021, 4 pour 2022 et 5 pour 2023.

$\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3.$

$\overline{y} = \dfrac{340+372+398+431+459}{5} = \dfrac{2\,000}{5} = 400.$

Le point moyen est $G(3\,;400)$.

Contrôle de l'équation : $29{,}7 \times 3 + 310{,}9 = 89{,}1 + 310{,}9 = 400$ ✔, on retrouve exactement $\overline{y}$.

Estimation pour 2028 : le rang vaut $x = 2\,028 - 2\,018 = 10$.

$y = 29{,}7 \times 10 + 310{,}9 = 297 + 310{,}9 = 607{,}9.$

L'association compterait environ 608 adhérents en 2028, si la tendance se poursuit.

Troisième question, premier motif : les nombres restent petits et maniables. Avec les années brutes, il faudrait manipuler des sommes de l'ordre de 10 000, avec un risque d'erreur de saisie accru.

Deuxième motif : l'ordonnée à l'origine devient interprétable. Ici $b = 310{,}9$ correspond à $x = 0$, c'est-à-dire à 2018 — juste avant le début de la série.

Avec les années brutes, b correspondrait à « l'an 0 », une valeur totalement dépourvue de sens.

Troisième motif, purement pratique : les calculatrices perdent en précision sur des grands nombres peu dispersés, ce qui est exactement le cas d'une colonne d'années.

Point de vigilance : le choix du rang doit être ANNONCÉ dans la copie (« on pose x = année − 2018 »), sans quoi le correcteur ne peut pas suivre la conversion finale.

Réponse. Rangs 1 à 5, $G(3\,;400)$ · rang 10 pour 2028, soit environ 608 adhérents · on travaille en rangs pour garder des nombres maniables, rendre b interprétable et éviter les pertes de précision.

Rappel de cours. Toujours préciser la convention de rang choisie, et l'utiliser dans les deux sens (année → rang, puis rang → année).

Erreur fréquente. Changer de convention en cours d'exercice ($x = 0$ pour 2019 puis

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x = 1$ pour 2019). Toutes les prévisions seraient décalées d'un an.

Correction de l'exercice 14 – Quand la droite ne convient pas

Valeurs ajustées : rang 1 : 12,14 + 86 = 98,14 ; rang 2 : 110,28 ; rang 3 : 122,42 ; rang 4 : 134,56 ; rang 5 : 146,70 ; rang 6 : 158,84.

Écarts (observé moins ajusté) : +1,86 ; −0,28 ; −1,42 ; −1,56 ; −0,70 ; +2,16.

Ces écarts ne sont pas répartis au hasard : ils sont POSITIFS aux deux extrémités et NÉGATIFS au milieu.

C'est la signature caractéristique d'un nuage INCURVÉ : la droite passe au-dessus des points au centre et en dessous aux bords.

Autrement dit, la vraie tendance n'est pas une droite mais une courbe qui monte de plus en plus vite.

Quotients successifs : $\frac{110}{100} = 1{,}10$; $\frac{121}{110} = 1{,}10$; $\frac{133}{121} \approx 1{,}099$; $\frac{146}{133} \approx 1{,}098$; $\frac{161}{146} \approx 1{,}103$.

Les quotients sont pratiquement constants et valent environ 1,10 : la croissance est d'environ 10 % par trimestre.

Le bon modèle est donc GÉOMÉTRIQUE (ou exponentiel) : $y = 100 \times 1{,}1^{x-1}$, avec $x = 1$ pour le premier trimestre.

Vérification au rang 6 : $100 \times 1{,}1^5 = 100 \times 1{,}61051 \approx 161{,}05$, à comparer aux 161 observés ✔. L'ajustement est bien meilleur.

Conséquence sur les prévisions : au rang 10, la droite donne $12{,}14 \times 10 + 86 \approx 207$ milliers d'utilisateurs, tandis que le modèle géométrique donne $100 \times 1{,}1^9 \approx 236$ milliers.

L'écart de près de 30 milliers d'utilisateurs montre que le choix du modèle n'est pas un détail de forme : il change complètement la prévision.

Leçon générale : la calculatrice donne toujours une droite. Regarder les écarts, ou simplement le nuage, est le seul moyen de savoir si elle a un sens.

Réponse. Écarts : +1,86 ; −0,28 ; −1,42 ; −1,56 ; −0,70 ; +2,16 · ils sont positifs aux bords et négatifs au centre : le nuage est incurvé · les quotients valent environ 1,10, le bon modèle est géométrique, $y = 100 \times 1{,}1^{x-1}$.

Rappel de cours. Des écarts en U (positifs aux bords, négatifs au milieu) invalident l'ajustement affine et signalent une croissance exponentielle.

Erreur fréquente. Valider l'ajustement affine parce que « les écarts sont petits ». Ce qui compte n'est pas leur taille mais leur RÉGULARITÉ.

Correction de l'exercice 15 – Ce qu'un ajustement affine dit des pourcentages

Rang 1 : 17,5 + 181,5 = 199. Rang 2 : 35 + 181,5 = 216,5.

Rang 5 : 87,5 + 181,5 = 269. Rang 7 : 122,5 + 181,5 = 304. Rang 8 : 140 + 181,5 = 321,5.

Taux du rang 1 au rang 2 : $t = \frac{216{,}5 - 199}{199} = \frac{17{,}5}{199} \approx 0{,}0879$, soit environ +8,79 %.

Taux du rang 7 au rang 8 : $t = \frac{321{,}5 - 304}{304} = \frac{17{,}5}{304} \approx 0{,}0576$, soit environ +5,76 %.

Constat : la hausse EN EUROS est toujours la même (17,5 milliers, c'est le coefficient directeur), mais le POURCENTAGE de hausse diminue d'année en année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'explication est immédiate : le même montant rapporté à une base de plus en plus grande donne un pourcentage de plus en plus petit.

Conséquence à retenir : un modèle AFFINE correspond à une croissance en pourcentage qui RALENTIT. Un modèle GÉOMÉTRIQUE, lui, garde un pourcentage constant et fait donc grossir les montants.

C'est exactement ce qui distingue les deux modèles du chapitre sur les suites, vu ici du côté des statistiques.

Troisième question : taux global du rang 1 au rang 5 : $\frac{269-199}{199} = \frac{70}{199} \approx 0{,}3518$, soit environ +35,18 %.

Taux annuel moyen : il y a 4 années d'évolution, donc $\mathrm{CM}_m = 1{,}3518^{\frac{1}{4}}$.

À la calculatrice : $1{,}3518^{0{,}25} \approx 1{,}078265$, soit un taux annuel moyen d'environ +7,83 %.

Vérification : $1{,}078265^2 \approx 1{,}162655$, puis $1{,}162655^2 \approx 1{,}351766 \approx 1{,}3518$ ✔.

Cohérence de l'ensemble : le taux moyen de +7,83 % se situe bien entre les +8,79 % du début de période et les taux plus faibles de la fin ✔.

Réponse. Valeurs ajustées : 199 ; 216,5 ; 269 ; 304 ; 321,5 · +8,79 % au début contre +5,76 % plus tard : la hausse en euros est constante, le pourcentage diminue · taux global ≈ +35,18 % sur quatre ans, soit un taux annuel moyen ≈ +7,83 %.

Rappel de cours. Modèle affine ⇒ montant constant ajouté ⇒ pourcentage décroissant. Modèle géométrique ⇒ pourcentage constant ⇒ montants croissants.

Erreur fréquente. Croire qu'une droite d'ajustement décrit une croissance « à taux constant ». C'est précisément le contraire.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : chiffre d'affaires d'une entreprise

$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5.$

$\overline{y} = \frac{340+368+401+425+458+488}{6} = \frac{2\,480}{6} \approx 413{,}33.$

Le point moyen est $G(3{,}5\,;413{,}33)$.

Contrôle : $29{,}54 \times 3{,}5 + 309{,}93 = 103{,}39 + 309{,}93 = 413{,}32$, soit $\overline{y}$ aux arrondis près ✔.

Qualité : les écarts successifs des y (28 ; 33 ; 24 ; 33 ; 30) restent proches de 30. Les points sont quasiment alignés, la tendance est croissante : l'ajustement affine est pleinement justifié.

Coefficient directeur : chaque année, le chiffre d'affaires progresse en moyenne de 29,54 milliers d'euros, soit environ 29 540 €.

Contrôle de cohérence : de 2024 à 2029, le chiffre d'affaires est passé de 340 à 488, soit 148 milliers en 5 ans, donc 29,6 par an en moyenne ✔.

Estimation 2032 : le rang vaut $x = 2\,032 - 2\,023 = 9$.

$y \approx 29{,}54 \times 9 + 309{,}93 = 265{,}86 + 309{,}93 = 575{,}79.$

Le chiffre d'affaires estimé pour 2032 est donc d'environ 575,8 milliers d'euros, soit près de 576 000 €.

Pour le seuil : on résout $29{,}54x + 309{,}93 > 600$.

$29{,}54x > 290{,}07$, donc $x > \frac{290{,}07}{29{,}54} \approx 9{,}82$.

Le premier rang entier est $x = 10$, ce qui correspond à l'année $2\,023 + 10 = 2\,033$.

Vérification : $x = 9$ donne 575,79 (insuffisant) et $x = 10$ donne 605,33 (dépasse) ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réserve à écrire : les deux estimations reposent sur une extrapolation de trois et quatre années au-delà des données. Elles ne valent que si la progression régulière de +29 540 € par an se maintient.

Réponse. $G(3{,}5\,;413{,}33)$, équation contrôlée ✔ · écarts réguliers : ajustement affine justifié · progression moyenne de 29 540 € par an · environ 575,8 milliers d'euros en 2032 · seuil de 600 franchi au rang 10, soit en 2033.

Rappel de cours. Ordre de rédaction attendu au bac : point moyen, contrôle, qualité de l'alignement (nuage, écarts), interprétation de a, puis prévisions assorties de leur réserve.

Erreur fréquente. Prendre $x = 8$ pour 2032 en comptant les années à partir de 2024 incluse. La convention est $x = 1$ en 2024, donc x = année − 2023.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : rentabilité d'un budget publicitaire

$$\overline{x} = \frac{10 + 15 + 20 + 25 + 30}{5} = \frac{100}{5} = 20.$$

$$\overline{y} = \frac{180 + 230 + 265 + 310 + 355}{5} = \frac{1\,340}{5} = 268.$$

Le point moyen est $G(20\,;268)$.

Contrôle : $8{,}6 \times 20 + 96 = 172 + 96 = 268$ ✔, exactement $\overline{y}$.

Coefficient directeur : chaque millier d'euros dépensé en publicité s'accompagne en moyenne de 8,6 milliers d'euros de ventes supplémentaires, soit 8 600 €.

Troisième question : il faut comparer le coût de la publicité au gain qu'elle procure, et non aux ventes brutes.

1 000 € de publicité en plus génèrent environ 8 600 € de ventes en plus.

Avec une marge de 20 %, ces ventes rapportent $8\,600 \times 0{,}20 = 1\,720$ € de marge.

Comparaison : 1 720 € de marge gagnée contre 1 000 € dépensés. L'opération rapporte donc 720 € nets.

Un millier d'euros de publicité supplémentaire est donc rentable, selon ce modèle.

Estimation pour $x = 40$: $y = 8{,}6 \times 40 + 96 = 344 + 96 = 440$ milliers d'euros.

Discussion de fiabilité, premier point : 40 est nettement au-delà de la plage observée (10 à 30). C'est une extrapolation d'un tiers au-delà du nuage.

Deuxième point : le modèle suppose un rendement CONSTANT de la publicité. En pratique, les rendements publicitaires décroissent — les premiers euros touchent les clients les plus faciles à convaincre.

Troisième point : l'entreprise ne pourra pas vendre indéfiniment, quel que soit son budget. La taille du marché finit par plafonner les ventes.

Conclusion à rédiger : l'estimation de 440 milliers d'euros donne un ordre de grandeur, probablement optimiste. Il serait prudent de tester un budget de 35 milliers avant de passer à 40.

Réponse. $G(20\,;268)$ et $8{,}6 \times 20 + 96 = 268$ ✔ · 1 000 € de publicité → environ 8 600 € de ventes · avec 20 % de marge, cela rapporte 1 720 € pour 1 000 € dépensés : c'est rentable · pour 40 milliers, ventes estimées à 440 milliers, mais l'extrapolation est optimiste (rendements décroissants, marché limité).

Rappel de cours. Une décision de gestion se prend sur la MARGE, jamais sur le chiffre d'affaires : ici 20 % de 8 600 €, et non 8 600 €.

Erreur fréquente. Conclure « rentable » en comparant 1 000 € de publicité à 8 600 € de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

ventes. Ce sont les 1 720 € de marge qu'il faut comparer.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : ajustement affine ou modèle exponentiel ?

Valeurs ajustées : $x = 0$: 43,24 ; $x = 1$: 63,01 ; $x = 2$: 82,78 ; $x = 3$: 102,55 ; $x = 4$: 122,32 ; $x = 5$: 142,10.

Écarts (observé moins ajusté) : +6,76 ; −1,01 ; −4,78 ; −6,55 ; −2,32 ; +7,90.

Ces écarts sont positifs aux deux extrémités et négatifs au milieu : c'est la signature d'un nuage INCURVÉ, pas d'un nuage aligné.

De plus ils atteignent 7,90 milliers pour des valeurs de l'ordre de 150, soit plus de 5 % : ce n'est pas négligeable.

Quotients successifs : $\frac{62}{50} = 1{,}24$; $\frac{78}{62} \approx 1{,}258$; $\frac{96}{78} \approx 1{,}231$; $\frac{120}{96} = 1{,}25$; $\frac{150}{120} = 1{,}25$.

Les quotients sont pratiquement constants autour de 1,25 : le nombre d'abonnés croît d'environ 25 % par an.

Second modèle proposé : $y = 50 \times 1{,}25^{x}$, modèle géométrique (ou exponentiel).

Vérification au rang 5 : $50 \times 1{,}25^{5} = 50 \times 3{,}051758 \approx 152{,}6$, à comparer aux 150 observés — bien plus proche que les 142,1 de la droite ✔.

Prévisions pour $x = 8$ (année 2033).

Modèle affine : $y \approx 19{,}77 \times 8 + 43{,}24 = 158{,}16 + 43{,}24 \approx 201{,}4$ milliers d'abonnés.

Modèle exponentiel : $y = 50 \times 1{,}25^{8} = 50 \times 5{,}960464 \approx 298{,}0$ milliers d'abonnés.

L'écart est considérable : près de 97 milliers d'abonnés, soit environ 50 % de la prévision affine.

Modèle à retenir : le modèle EXPONENTIEL, pour deux raisons convergentes.

Première raison, statistique : les écarts de l'ajustement affine présentent un motif en U, ce qui l'invalide, tandis que les quotients de la série sont remarquablement constants.

Seconde raison, économique : un service en phase de développement croît par un pourcentage d'abonnés, pas par un nombre fixe. Le modèle exponentiel traduit ce mécanisme.

Réserve finale, à ne pas oublier : le modèle exponentiel prévoit une croissance sans limite, ce qui est impossible. Sur un horizon long, il faudrait un modèle de saturation, comme celui du chapitre précédent.

Réponse. Écarts : +6,76 ; −1,01 ; −4,78 ; −6,55 ; −2,32 ; +7,90, en U donc nuage incurvé · quotients ≈ 1,25, modèle $y = 50 \times 1{,}25^{x}$ · en 2033 : ≈ 201,4 (affine) contre ≈ 298,0 (exponentiel) · retenir l'exponentiel, mais sans le prolonger indéfiniment.

Rappel de cours. Deux indices se recoupent toujours : des écarts en U d'un côté, des quotients constants de l'autre. Les deux désignent le modèle exponentiel.

Erreur fréquente. Se fier à la seule droite donnée par la calculatrice : elle existe toujours, même quand le nuage est nettement courbe, comme ici.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : baisse de consommation et limites du modèle

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4.$$

$$\overline{y} = \frac{480+465+447+432+415+401+384}{7} = \frac{3\,024}{7} = 432.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le point moyen est $G(4\,;432)$.

Contrôle : $-16\times 4+496=-64+496=432$ ✔, exactement $\overline{y}$.

Coefficient directeur : la consommation diminue en moyenne de 16 MWh par an. Le signe négatif traduit cette baisse.

Les écarts successifs $(-15\,;-18\,;-15\,;-17\,;-14\,;-17)$ sont tous proches de -16 : l'alignement est excellent, et la tendance décroissante.

Estimation au rang 12 : $y=-16\times 12+496=-192+496=304$ MWh.

Pour le seuil : on résout $-16x+496<300$.

$-16x<-196$, donc $x>\dfrac{196}{16}=12{,}25$. Attention au changement de sens de l'inégalité lors de la division par -16.

Le premier rang entier est $x=13$.

Vérification : $x=12$ donne 304 MWh (encore au-dessus) et $x=13$ donne $-208+496=288$ MWh (en dessous) ✔.

Cinquième question : $y=-16\times 31+496=-496+496=0$ MWh.

Le modèle prévoit donc une consommation NULLE au rang 31, et négative au-delà.

Or une consommation d'énergie ne peut évidemment pas être nulle sur un site en activité, et encore moins négative.

Conclusion : le modèle affine décrit très bien la période observée (rangs 1 à 7), mais il perd tout sens économique loin devant.

Explication concrète : les premières économies d'énergie sont les plus faciles (isolation, éclairage, régulation). Ensuite les gains deviennent de plus en plus difficiles, et la baisse ralentit forcément.

Rédaction attendue : le modèle est fiable pour de l'interpolation et pour une extrapolation courte, mais il faut refuser toute prévision au-delà d'une dizaine d'années.

Réponse. $G(4\,;432)$ et $-16\times 4+496=432$ ✔ · baisse moyenne de 16 MWh par an, écarts réguliers : excellent alignement décroissant · 304 MWh au rang 12 · seuil de 300 MWh franchi au rang 13 · au rang 31 le modèle donne 0 MWh, ce qui est absurde : il ne vaut pas à long terme.

Rappel de cours. Diviser une inéquation par un nombre NÉGATIF change le sens de l'inégalité. C'est l'erreur la plus fréquente sur les tendances décroissantes.

Erreur fréquente. Prolonger un modèle décroissant sans limite. Toute grandeur physique ou économique bute sur un plancher que la droite ignore.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : synthèse, prix et recette optimale

$$\overline{x}=\frac{20+25+30+35+40}{5}=\frac{150}{5}=30.$$

$$\overline{y}=\frac{95+82+70+56+47}{5}=\frac{350}{5}=70.$$

Le point moyen est $G(30\,;70)$.

Contrôle : $-2{,}44\times 30+143{,}2=-73{,}2+143{,}2=70$ ✔, exactement $\overline{y}$.

Les écarts successifs des y $(-13\,;-12\,;-14\,;-9)$ sont réguliers : les points sont presque alignés, avec une tendance décroissante. L'ajustement affine est justifié.

Coefficient directeur : chaque euro d'augmentation du prix fait perdre en moyenne 2,44 milliers d'unités vendues, soit 2 440 unités.

C'est la traduction chiffrée d'une évidence commerciale : plus c'est cher, moins on en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vend.

Estimation pour $x = 45$: $y = -2{,}44 \times 45 + 143{,}2 = -109{,}8 + 143{,}2 = 33{,}4$ milliers d'unités.

Recette : elle vaut prix × quantité, soit $R(x) = x \times (-2{,}44x + 143{,}2)$.

En développant : $R(x) = -2{,}44x^2 + 143{,}2x$, exprimée en milliers d'euros.

On dérive : $R'(x) = -4{,}88x + 143{,}2$.

$R'(x) = 0$ donne $x = \dfrac{143{,}2}{4{,}88} \approx 29{,}34$.

R' est décroissante (coefficient $-4{,}88$) : positive avant 29,34, négative après. La recette est donc maximale pour un prix d'environ 29,34 €.

En pratique, l'entreprise fixerait le prix à 29 € ou à 29,50 €.

Recette maximale :
$R(29{,}34) \approx -2{,}44 \times 860{,}8 + 143{,}2 \times 29{,}34 \approx -2\,100{,}4 + 4\,201{,}4 \approx 2\,101$ milliers d'euros.

La recette maximale espérée est donc d'environ 2 101 milliers d'euros, soit près de 2,1 millions d'euros.

Contrôle direct : à 29,34 €, les quantités valent $-2{,}44 \times 29{,}34 + 143{,}2 \approx 71{,}61$ milliers d'unités, et $29{,}34 \times 71{,}61 \approx 2\,101$ ✔.

Comparaison utile : au prix testé de 30 €, la recette vaut $30 \times 70 = 2\,100$ milliers d'euros — quasiment l'optimum. L'entreprise est déjà très bien positionnée.

Réserve à formuler : le calcul optimise la RECETTE, pas le bénéfice. Sans connaître les coûts de production, on ne peut pas conclure sur le prix le plus profitable.

Réponse. $G(30\,;70)$, équation contrôlée ✔, nuage presque aligné : ajustement justifié · chaque euro de hausse fait perdre 2 440 unités · à 45 €, environ 33,4 milliers d'unités · $R(x) = -2{,}44x^2 + 143{,}2x$, maximale pour $x \approx 29{,}34$ € · recette maximale ≈ 2 101 milliers d'euros.

Rappel de cours. Recette = prix × quantité, la quantité venant de l'ajustement. C'est ainsi que la statistique alimente l'optimisation du chapitre 3.

Erreur fréquente. Confondre recette maximale et bénéfice maximal. Sans les coûts, le prix optimal pour le bénéfice reste inconnu — et il est toujours supérieur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).