Statistiques à deux variables — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Deux colonnes de chiffres, et une question de gestion derrière : les dépenses publicitaires font-elles vraiment vendre ? le chiffre d'affaires suit-il une tendance régulière ? La statistique à deux variables répond en cherchant la droite qui passe au plus près du nuage de points — la fameuse droite des moindres carrés, que la calculatrice donne en quelques touches. Encore faut-il savoir ce qu'on en fait : son coefficient directeur se lit comme un rythme (« chaque millier d'euros de publicité rapporte 8 600 € de ventes »), ses prévisions valent beaucoup à l'intérieur du nuage et de moins en moins loin devant, et surtout elle n'est légitime que si les points sont réellement alignés. Ces 20 exercices installent le point moyen, l'ajustement à la calculatrice, le critère des moindres carrés, la distinction entre interpolation et extrapolation — et savent aussi dire quand la droite ne convient pas, résidus à l'appui.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/statistiques-deux-variables

Exercice 1 – Calculer le point moyen

Le tableau donne le nombre de commandes reçues par une entreprise selon le rang du mois : rang x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — commandes y : 12 ; 15 ; 19 ; 22 ; 26 ; 32.

1. Calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

2. Donne les coordonnées du point moyen G et explique ce qu'il représente.

Exercice 2 – Décrire un nuage de points

Trois nuages de points sont décrits ci-dessous. Pour chacun, dis si un ajustement affine semble pertinent, et si la tendance est croissante ou décroissante.

1. Nuage A : les points montent régulièrement et sont presque tous sur une même droite.

2. Nuage B : les points descendent régulièrement, avec de légers écarts de part et d'autre d'une droite.

3. Nuage C : les points forment un arc, montant d'abord doucement puis de plus en plus vite.

Exercice 3 – Utiliser une droite d'ajustement

Une droite d'ajustement du chiffre d'affaires d'un magasin, en milliers d'euros, a pour équation $y = 2{,}4x + 15$, où x est le rang de l'année ($x = 1$ pour 2019).

1. Estime le chiffre d'affaires en 2030.

2. Selon ce modèle, en quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 50 milliers d'euros ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Vérifier qu'une droite passe par G

Le tableau donne le nombre de visiteurs d'un site, en milliers, selon le rang du trimestre : x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 — y : 50 ; 58 ; 63 ; 72 ; 77. La calculatrice donne la droite d'ajustement $y = 6{,}8x + 50{,}4$.

1. Calcule les coordonnées du point moyen G.

2. Vérifie que la droite d'ajustement passe bien par G.

Exercice 5 – Interpréter le coefficient directeur

Trois ajustements affines ont été obtenus dans des contextes différents. Interprète le coefficient directeur de chacun, en une phrase concrète.

1. Chiffre d'affaires (milliers d'euros) selon le rang de l'année : $y = 3{,}2x + 45$.

2. Nombre d'invendus selon le rang du mois : $y = -1{,}5x + 40$.

3. Ventes (milliers d'euros) selon les dépenses publicitaires (milliers d'euros) : $y = 8{,}6x + 96$.

Exercice 6 – Droite des moindres carrés à la calculatrice

Le chiffre d'affaires d'une société, en milliers d'euros, est donné selon le rang de l'année : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 — y : 200 ; 215 ; 235 ; 250 ; 270.

1. Calcule le point moyen G.

2. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = 17{,}5x + 181{,}5$. Vérifie qu'elle passe par G.

3. Interprète le coefficient directeur.

Exercice 7 – Interpolation et extrapolation

On reprend l'ajustement $y = 17{,}5x + 181{,}5$ obtenu sur les rangs 1 à 5 (chiffre d'affaires en milliers d'euros).

1. Estime le chiffre d'affaires au rang 3,5. Comment s'appelle ce type d'estimation ?

2. Estime le chiffre d'affaires au rang 8. Comment s'appelle ce type d'estimation ?

3. Laquelle des deux estimations est la plus fiable ? Pourquoi ?

Exercice 8 – Le critère des moindres carrés

Pour la série x_i : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et y_i : 3 ; 5 ; 8 ; 9, on compare deux droites à l'aide de la somme des carrés des écarts $S = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$.

1. Calcule S pour la droite $D_1 : y = 2x + 1$.

2. Calcule S pour la droite des moindres carrés $D_2 : y = 2{,}1x + 1$.

3. Quelle droite ajuste le mieux le nuage ?

Exercice 9 – Déterminer une année de dépassement

On dispose de l'ajustement $y = 17{,}5x + 181{,}5$, où y est le chiffre d'affaires en milliers d'euros et x le rang de l'année, $x = 1$ correspondant à 2021.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Selon ce modèle, en quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 350 milliers d'euros ?

2. Quelle réserve faut-il formuler ?

Exercice 10 – Comparer valeur observée et valeur ajustée

Pour la série x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et y : 200 ; 215 ; 235 ; 250 ; 270, la droite d'ajustement est $y = 17{,}5x + 181{,}5$.

1. Calcule les valeurs prévues par la droite pour chaque rang.

2. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées, et commente.

Exercice 11 – Publicité et ventes : étude complète

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x (en milliers d'euros) et ses ventes y (en milliers d'euros) sur six périodes : x : 5 ; 8 ; 12 ; 15 ; 20 ; 25 — y : 120 ; 150 ; 190 ; 215 ; 265 ; 310. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx 9{,}49x + 73{,}86$.

1. Calcule le point moyen G et vérifie l'équation.

2. Le nuage est-il presque aligné ? Justifie à l'aide des accroissements $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ entre points successifs.

3. Interprète le coefficient directeur, puis estime les ventes pour 30 milliers d'euros de publicité.

Exercice 12 – Choisir entre deux études

Deux services d'une entreprise ont chacun réalisé une étude, sur les mêmes 8 mois. Le service commercial obtient $y = 4{,}2x + 30$, avec un nuage presque aligné et une somme des carrés des écarts $S = 12$. Le service des ressources humaines obtient $y = 6{,}8x + 12$, avec un nuage très dispersé et $S = 310$.

1. Laquelle des deux droites peut servir à faire des prévisions ? Justifie.

2. Le directeur remarque que le second coefficient directeur est plus grand et en conclut que la seconde relation est « plus forte ». Que lui répondre ?

Exercice 13 – Passer des années aux rangs

Le nombre d'adhérents d'une association est : 2 019 → 340 ; 2 020 → 372 ; 2 021 → 398 ; 2 022 → 431 ; 2 023 → 459. On pose x = année − 2018.

1. Donne la série des rangs et calcule le point moyen.

2. La calculatrice donne $y = 29{,}7x + 310{,}9$. Estime le nombre d'adhérents en 2028.

3. Pourquoi travaille-t-on avec des rangs plutôt qu'avec les années ?

Exercice 14 – Quand la droite ne convient pas

Le nombre d'utilisateurs d'une application, en milliers, est : x (rang du trimestre) : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — y : 100 ; 110 ; 121 ; 133 ; 146 ; 161. La calculatrice donne $y \approx 12{,}14x + 86$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées.

2. Que révèle la répartition de ces écarts ?

3. Calcule les quotients successifs $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ et propose un meilleur modèle.

Exercice 15 – Ce qu'un ajustement affine dit des pourcentages

Un chiffre d'affaires, en milliers d'euros, est ajusté par la droite $y = 17{,}5x + 181{,}5$, où x est le rang de l'année.

1. Calcule les valeurs ajustées aux rangs 1, 2, 5, 7 et 8.

2. Calcule le taux d'évolution prévu du rang 1 au rang 2, puis du rang 7 au rang 8. Que constates-tu ?

3. Calcule le taux d'évolution global du rang 1 au rang 5, puis le taux annuel moyen correspondant.

Exercice 16 – Type bac : chiffre d'affaires d'une entreprise

Le chiffre d'affaires d'une entreprise, en milliers d'euros, est donné selon le rang x de l'année ($x = 1$ pour 2024) : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 — y : 340 ; 368 ; 401 ; 425 ; 458 ; 488. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx 29{,}54x + 309{,}93$.

1. Calcule le point moyen G et contrôle l'équation.

2. L'ajustement affine est-il justifié ?

3. Interprète le coefficient directeur.

4. Estime le chiffre d'affaires de 2032.

5. En quelle année le chiffre d'affaires dépasserait-il 600 milliers d'euros ?

Exercice 17 – Type bac : rentabilité d'un budget publicitaire

Une entreprise a relevé ses dépenses publicitaires x et ses ventes y, en milliers d'euros : x : 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 — y : 180 ; 230 ; 265 ; 310 ; 355. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = 8{,}6x + 96$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen.

2. Interprète le coefficient directeur.

3. L'entreprise réalise une marge de 20 % sur ses ventes. Un millier d'euros de publicité supplémentaire est-il rentable ?

4. Estime les ventes pour un budget de 40 milliers d'euros et discute la fiabilité de cette estimation.

Exercice 18 – Type bac : ajustement affine ou modèle exponentiel ?

Le nombre d'abonnés d'un service, en milliers, est : x (rang de l'année, $x = 0$ pour 2025) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 — y : 50 ; 62 ; 78 ; 96 ; 120 ; 150. La calculatrice donne la droite $y \approx 19{,}77x + 43{,}24$.

1. Calcule les écarts entre valeurs observées et valeurs ajustées.

2. Calcule les quotients successifs et propose un second modèle.

3. Compare les prévisions des deux modèles pour 2033 ($x = 8$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Quel modèle retenir, et pourquoi ?

Exercice 19 – Type bac : baisse de consommation et limites du modèle

La consommation d'énergie d'un site industriel, en MWh, est : x (rang de l'année) : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 — y : 480 ; 465 ; 447 ; 432 ; 415 ; 401 ; 384. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = -16x + 496$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen.

2. Interprète le coefficient directeur et justifie que le nuage est presque aligné.

3. Estime la consommation au rang 12.

4. À partir de quel rang la consommation passerait-elle sous 300 MWh ?

5. Que prévoit le modèle au rang 31 ? Qu'en conclure ?

Exercice 20 – Type bac : synthèse, prix et recette optimale

Une entreprise a testé cinq prix de vente x (en euros) et relevé les quantités vendues y (en milliers d'unités) : x : 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 — y : 95 ; 82 ; 70 ; 56 ; 47. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y = -2{,}44x + 143{,}2$.

1. Vérifie que la droite passe par le point moyen et juge l'alignement du nuage.

2. Interprète le coefficient directeur.

3. Estime les quantités vendues pour un prix de 45 €.

4. Exprime la recette $R(x)$ en fonction du prix, puis détermine le prix qui maximise la recette.

5. Quelle recette maximale l'entreprise peut-elle espérer ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).