

Fiches de révision de maths

Licence 1 (L1)

21 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1.	Logique et raisonnement	p. 2
2.	Ensembles et applications	p. 4
3.	Nombres réels et borne supérieure	p. 6
4.	Suites numériques	p. 8
5.	Limites et continuité	p. 10
6.	Dérivabilité	p. 12
7.	Fonctions usuelles et réciproques	p. 14
8.	Développements limités et formules de Taylor	p. 16
9.	Intégrale de Riemann	p. 18
10.	Équations différentielles linéaires	p. 20
11.	Nombres complexes	p. 22
12.	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	p. 24
13.	Polynômes et fractions rationnelles	p. 26
14.	Systèmes linéaires et pivot de Gauss	p. 28
15.	Calcul matriciel	p. 30
16.	Espaces vectoriels	p. 32
17.	Applications linéaires	p. 34
18.	Déterminants	p. 36
19.	Géométrie du plan et de l'espace	p. 38
20.	Dénombrement et probabilités	p. 40
21.	Python et calcul scientifique	p. 43

Logique et raisonnement – L1

Fiche de révision essentielle – connecteurs, quantificateurs, négations et preuves

1. Connecteurs logiques

Pour des propositions A, B :

$$\neg A, \quad A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B.$$

Le « ou » mathématique est **inclusif**. Une implication est fausse seulement lorsque A est vraie et B fausse.

A	B	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Si $A \Rightarrow B$, A est **suffisante** pour B et B est **nécessaire** pour A .

Négations utiles

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B.$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B.$$

Piège : Contraposée : $\neg B \Rightarrow \neg A$. Réciproque : $B \Rightarrow A$. Ne pas les confondre.

2. Quantificateurs

$$\forall x \in E, P(x) \quad : \text{pour tout } x,$$

$$\exists x \in E, P(x) \quad : \text{il existe au moins un } x.$$

$\exists!x$ signifie « il existe un unique x ».

Négation

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg P(x),$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg P(x).$$

Avec plusieurs quantificateurs, on les inverse **dans le même ordre** :

$$\neg(\forall x \exists y P(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg P(x, y).$$

Ordre des quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$$

est vraie (prendre $y = x + 1$), alors que

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$$

est fausse.

Piège : $\forall x \exists y$ autorise y à dépendre de x ; $\exists y \forall x$ impose le même y pour tous les x .

3. Modes de raisonnement

Direct

Pour $A \Rightarrow B$: supposer A , dérouler des implications valides, conclure B .

Contraposée

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Ex. n^2 pair $\Rightarrow n$ pair : montrer « n impair $\Rightarrow n^2$ impair ».

Absurde

Pour prouver P , supposer $\neg P$, obtenir une contradiction, conclure P .

Disjonction de cas

Découper en cas **exhaustifs** (pair/impair, $x \geq 0/x < 0$), puis prouver l'objectif dans chacun.

Contre-exemple

Pour réfuter $\forall x \in E, P(x)$, trouver $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Analyse-synthèse

Analyse : déduire des conditions nécessaires et obtenir des candidats.

Synthèse : vérifier les candidats dans l'énoncé initial.

4. Récurrences

Récurrence simple

Pour prouver $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : fixer $n \geq n_0$, supposer $P(n)$, prouver $P(n+1)$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple-type :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Récurrence double

Deux bases puis

$$P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2).$$

Adaptée aux suites définies à partir de deux termes précédents.

Récurrence forte

Dans l'hérédité, on suppose

$$P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$$

pour montrer $P(n+1)$.

Piège : Une récurrence sans initialisation n'est pas une preuve.

5. Exemple L1 : négation d'une limite

Convergence de (u_n) vers ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Sa négation est

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| \geq \varepsilon.}$$

6. Réflexes de rédaction

- Préciser le **domaine** des variables.
- Distinguer $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
- Pour $A \Leftrightarrow B$, prouver les **deux sens**.
- Après une étape non réversible (ex. mise au carré), faire une **synthèse**.
- Ne jamais prouver un « pour tout » par quelques exemples.
- Un seul contre-exemple suffit à réfuter un énoncé universel.

— Conclure explicitement la preuve.

7. Quel raisonnement choisir ?

Situation	Réflexe
$A \Rightarrow B$	Direct ou contraposée
Impossibilité	Absurde
Parité / signe	Cas
« Pour tout » douteux	Contre-exemple
Toutes les solutions	Analyse-synthèse
Propriété en n	Récurrence
$A \Leftrightarrow B$	Deux implications

8. Pièges express

- $\neg(A \Rightarrow B) \neq (\neg A \Rightarrow \neg B)$.
- $A \Rightarrow B$ n'implique pas $B \Rightarrow A$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$, pas toujours x .
- $\forall x \exists y$ n'est pas $\exists y \forall x$.
- Élever au carré peut créer des solutions parasites.

9. Auto-test en 60 secondes

Savoir répondre immédiatement :

1. Nier $\forall x \in E, P(x)$.
2. Donner la contraposée de $A \Rightarrow B$.
3. Expliquer pourquoi $\forall x \exists y$ et $\exists y \forall x$ diffèrent.
4. Citer les trois étapes d'une récurrence simple.
5. Expliquer le rôle de la synthèse après une transformation non réversible.

10. Traductions à connaître

- « P si Q » : $Q \Rightarrow P$.
- « P seulement si Q » : $P \Rightarrow Q$.
- « P si et seulement si Q » : $P \Leftrightarrow Q$.
- « Aucun $x \in E$ ne vérifie P » : $\forall x \in E, \neg P(x)$, soit encore $\neg \exists x \in E, P(x)$.
- « Il existe un unique x vérifiant P » : existence + unicité.

11. Exemples éclair

- Contre-exemple à $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$: prendre $x = -1$.
- Cas : $n(n+1)$ est pair car n ou $n+1$ est pair.
- Analyse-synthèse : $x^2 = x \Rightarrow x \in \{0, 1\}$, puis les deux valeurs sont vérifiées.

Mémo final : quantifier proprement, nier en échangeant $\forall/\exists$, identifier la forme logique de l'objectif, choisir la méthode adaptée, puis rédiger une chaîne d'arguments où chaque étape est justifiée.

Fiche de révision – Ensembles et applications

Licence 1 (L1) – définitions, identités et méthodes à savoir rédiger

1. Ensembles

Appartenance : $x \in E$. **Inclusion :** $A \subseteq E$.

$$A \subseteq B \iff \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B,$$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Ensemble des parties

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}.$$

Si $|E| = n < \infty$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

Opérations

Pour $A, B \subseteq E$:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B,$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B,$$

$$x \in A^c \iff x \notin A,$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B.$$

De Morgan :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Distributivité :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Méthode : prouver $A = B$

Par double inclusion, ou en fixant x et en écrivant

$$x \in A \iff \dots \iff x \in B.$$

Produit cartésien

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

Si E, F sont finis : $|E \times F| = |E| |F|$.

Pièges de notation

$1 \in E$ n'est pas la même chose que $\{1\} \subseteq E$.

Un couple (a, b) est ordonné ; l'ensemble $\{a, b\}$ ne l'est pas.

2. Applications et images

Une application

$$f : E \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x)$$

associe à chaque $x \in E$ un unique $f(x) \in F$. Les ensembles E et F font partie de sa définition.

Image de l'application :

$$\text{Im}(f) = f(E) \subseteq F.$$

Identité : $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$.

Image directe

Pour $A \subseteq E$,

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Image réciproque

Pour $B \subseteq F$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Elle est définie pour **toute** application f .

Identités à connaître

Pour $A, A' \subseteq E$ et $B, B' \subseteq F$:

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$

$$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A'),$$

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$$

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B),$$

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap \text{Im}(f),$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

Piège majeur : deux sens de f^{-1}

$f^{-1}(B)$ = **image réciproque d'une partie B** : elle existe toujours.

$f^{-1} : F \rightarrow E$ = **application réciproque** : elle n'existe que si f est bijective.

Exemple. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, alors

$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2],$$

bien que f ne soit pas bijective.

Méthodes et propriétés essentielles

3. Composition et restriction

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$,

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On applique **d'abord** f , puis g .

Pour $A \subseteq E$, la restriction est

$$f|_A : A \rightarrow F, \quad x \mapsto f(x).$$

Changer le domaine peut changer l'injectivité; changer le codomaine peut changer la surjectivité.

4. Injective / surjective / bijective

Injective

$$\forall x, y \in E, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Preuve : supposer $f(x) = f(y)$ et obtenir $x = y$.

Pour réfuter : trouver $x \neq y$ avec $f(x) = f(y)$.

Surjective

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

Équivalent à $f(E) = F$.

Preuve : fixer $y \in F$, résoudre $f(x) = y$, puis vérifier $x \in E$.

Pour réfuter : exhiber $y \in F$ sans antécédent.

Bijective

f est bijective $\iff$ elle est injective et surjective $\iff$ chaque $y \in F$ possède un unique antécédent.
Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ existe et

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Méthode efficace pour une bijection : pour $y \in F$, résoudre $f(x) = y$ et montrer qu'il existe une **unique** solution $x \in E$. La formule obtenue donne souvent $f^{-1}(y)$.

5. Composition : règles

Pour $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$:

- f, g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective ;
- f, g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective ;
- f, g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective ;
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ;
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ;
- si f, g sont bijectives,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

6. Ensembles finis

Si E et F sont finis :

$$|E| > |F| \Rightarrow \text{pas d'injection } E \rightarrow F,$$

$$|E| < |F| \Rightarrow \text{pas de surjection } E \rightarrow F.$$

Si $|E| = |F| < \infty$, pour $f : E \rightarrow F$:

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

7. Exemple repère

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

f n'est ni injective ($f(1) = f(-1)$), ni surjective (-1 n'a pas d'antécédent).

En revanche,

$$g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad g(x) = x^2$$

est bijective et $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Ce qui dépend du domaine / codomaine

Une même formule peut définir des applications ayant des propriétés différentes. Toujours lire la totalité de $f : E \rightarrow F$, pas seulement $f(x)$.

8. Checklist avant de conclure

- Ai-je identifié le **domaine** et le **codomaine** ?
- Pour une surjectivité, l'antécédent construit appartient-il bien au domaine ?
- Ai-je distingué image directe et image réciproque ?
- Une égalité d'ensembles est-elle justifiée dans les deux sens ?
- Si j'écris f^{-1} comme application, ai-je prouvé la bijectivité ?
- Dans $g \circ f$, ai-je respecté l'ordre : f puis g ?

Nombres réels et borne supérieure

Licence 1 — Fiche de révision

1. Ordre sur $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un **corps totalement ordonné**. Pour $x \leq y$:

$$x + z \leq y + z.$$

Si $z \geq 0$, alors $xz \leq yz$; si $z \leq 0$, alors $xz \geq yz$.

Attention : multiplier/diviser une inégalité par un réel négatif inverse son sens.

2. Majorants et extrema

Pour $A \subset \mathbb{R}$:

$$M \text{ majore } A \iff \forall a \in A, a \leq M,$$

$$m \text{ minore } A \iff \forall a \in A, m \leq a.$$

A est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Maximum :

$$M = \max A \iff M \in A \text{ et } \forall a \in A, a \leq M.$$

De même pour $\min A$.

Différence clé : un majorant n'a pas à appartenir à A . Un maximum, oui.

3. Borne supérieure / inférieure

Si A est non vide et majorée :

$$\sup A = \text{plus petit majorant de } A.$$

Si A est non vide et minorée :

$$\inf A = \text{plus grand minorant de } A.$$

Complétude de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Lien avec les extrema :

$$\sup A \in A \iff \sup A = \max A,$$

$$\inf A \in A \iff \inf A = \min A.$$

Exemple :

$$\sup]0, 1[= 1, \quad \inf]0, 1[= 0,$$

mais $]0, 1[$ n'a ni maximum ni minimum.

4. Critère en ε

$$\begin{array}{c} M = \sup A \\ \text{ssi} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A, a \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a. \end{array} \right. \end{array}$$

Pour $m = \inf A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in A, m \leq a, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < m + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Méthode : 1) montrer que le candidat est une borne ; 2) montrer qu'il est optimal avec ε .

5. Propriétés de $\sup$ et $\inf$

Si $A \subset B$:

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf B \leq \inf A.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$:

$$\sup(A + c) = \sup A + c,$$

$$\inf(A + c) = \inf A + c.$$

Pour $\lambda > 0$:

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A, \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf A.$$

Et

$$\inf A = -\sup(-A).$$

6. Propriété d'Archimède

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Équivalent utile :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

C'est l'outil standard pour rendre $1/n$ aussi petit que souhaité.

7. Densité

Rationnels :

$$\forall a < b, \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b.$$

Irrationnels :

$$\forall a < b, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < x < b.$$

Donc entre deux réels distincts, il y a à la fois des rationnels et des irrationnels.

8. Partie entière

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

$\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $\leq x$.

$$\lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k + 1.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k.$$

Partie fractionnaire :

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

Exemples :

$$\lfloor 3.7 \rfloor = 3, \quad \lfloor -2.3 \rfloor = -3.$$

Piège : pour un réel négatif, la partie entière n'est pas la troncature vers 0.

9. Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x - a|$ est la distance entre x et a .

Formules essentielles :

$$|xy| = |x||y|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Pour $r > 0$:

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r,$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r.$$

10. Pièges à éviter

- Confondre $\sup A$ et $\max A$.
- Croire que $\sup A \in A$ automatiquement.
- Oublier que le critère en ε demande *tout* $\varepsilon > 0$.
- Écrire $+\infty \in \mathbb{R}$: faux.
- Mal gérer les nombres négatifs avec $\lfloor x \rfloor$.
- Oublier que $|x - a|$ représente une distance.

11. Réflexes d'examen

Pour montrer $M = \sup A$:

1. prouver $a \leq M$ pour tout $a \in A$;
2. fixer $\varepsilon > 0$;
3. construire $a \in A$ avec $M - \varepsilon < a$.

Exemple-type :

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \geq 1 \right\}.$$

Comme $n/(n+1) < 1$, 1 majore A . Et

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

donc $\sup A = 1$, sans maximum.

12. Formules flash

$$\sup]a, b[= b, \quad \inf]a, b[= a$$

$$\sup A \in A \implies \max A = \sup A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n : 1/n < \varepsilon$$

$$|x - a| < r \iff x \in]a - r, a + r[$$

Fiche de révision — Suites numériques

Licence 1 (L1) — convergence, théorèmes et suites récurrentes

1. Convergence : définition et conséquences

$$u_n \rightarrow \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

La limite est **unique**. Toute suite convergente est **bornée**.
Modifier un nombre fini de termes ne change pas la limite.

Limites infinies :

$$u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n \geq N, u_n > A.$$

Définition analogue pour $-\infty$.

Preuve ε - N : partir de $|u_n - \ell|$, majorer, imposer $< \varepsilon$, puis choisir explicitement $N(\varepsilon)$.

2. Opérations et ordre

Si $u_n \rightarrow \ell, v_n \rightarrow m$:

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + m, \quad u_n v_n \rightarrow \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un rang et

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang et si les deux suites convergent, alors $\ell \leq m$.

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Elles ne donnent aucune limite : il faut transformer l'expression.

3. Comparaison et gendarmes

Si, à partir d'un rang,

$$a_n \leq u_n \leq b_n, \quad a_n \rightarrow \ell, \quad b_n \rightarrow \ell,$$

alors $u_n \rightarrow \ell$.

Exemple : $|\sin n| \leq 1$ implique

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

4. Suites monotones

- croissante + majorée $\Rightarrow$ convergente ;
- décroissante + minorée $\Rightarrow$ convergente.

Et

$$\lim u_n = \sup\{u_n\} \quad \text{ou} \quad \inf\{u_n\}.$$

Croissante seule ne suffit pas : $u_n = n \rightarrow +\infty$.

5. Limites usuelles

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} &\rightarrow 0 \quad (\alpha > 0), & q^n &\rightarrow 0 \quad (|q| < 1), \\ n^\alpha &\rightarrow +\infty \quad (\alpha > 0), & q^n &\rightarrow +\infty \quad (q > 1). \end{aligned}$$

Pour un quotient de polynômes en n , diviser par la plus grande puissance pertinente.

6. Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si

$$u_n \nearrow, \quad v_n \searrow, \quad v_n - u_n \rightarrow 0.$$

Alors elles convergent vers une même limite ℓ et

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

7. Suites extraites

Une suite extraite est $(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Si $u_n \rightarrow \ell$, toute suite extraite converge vers ℓ .

Donc deux sous-suites de limites différentes prouvent la **divergence** de (u_n) .

Exemple : pour $u_n = (-1)^n$,

$$u_{2n} = 1 \rightarrow 1, \quad u_{2n+1} = -1 \rightarrow -1.$$

Donc (u_n) diverge.

Bolzano–Weierstrass : toute suite réelle bornée possède au moins une suite extraite convergente.

Une limite de sous-suite est appelée **valeur d'adhérence**.

8. Réflexes pour démontrer une limite

- Expression avec un terme oscillant borné : majorer en valeur absolue et utiliser les gendarmes.
- Suite monotone : chercher immédiatement la borne adaptée.
- Oscillation : tester les sous-suites paires et impaires.
- Quotient ∞/∞ : factoriser par le terme dominant.
- Différence $\infty - \infty$: mettre au même dénominateur, factoriser ou rationaliser.

9. Erreurs de logique fréquentes

- bornée $\nRightarrow$ convergente ;
- monotone $\nRightarrow$ convergente sans borne adaptée ;
- $u_n < v_n$ n'implique pas $\lim u_n < \lim v_n$;
- une forme indéterminée n'est jamais un résultat ;
- Bolzano–Weierstrass ne dit pas que la suite entière converge.

10. Exemple éclair

$$\text{Pour } u_n = \frac{n}{n+1},$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

donc (u_n) est croissante ; elle est majorée par 1. Elle converge et

$$1 - u_n = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \rightarrow 1.$$

Suites récurrentes : méthode et pièges

11. Récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$ **Plan standard :**

1. Trouver un intervalle stable $I : f(I) \subset I$.
2. Prouver par récurrence que $u_n \in I$.
3. Étudier $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, ou exploiter la monotonie de f .
4. Obtenir monotonie + borne, donc convergence.
5. Si f est continue et $u_n \rightarrow \ell$, alors seulement :

$$\ell = f(\ell).$$

6. Garder les points fixes compatibles avec I .

Piège majeur : résoudre $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas la convergence. $f(x) = 2x$ a le point fixe 0, mais $u_{n+1} = 2u_n$, $u_0 = 1$, donne $u_n = 2^n \rightarrow +\infty$.

12. Exemple-type complet

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Stabilité. Pour $x \in [0, 2]$, $\sqrt{2+x} \in [0, 2]$. Donc $0 \leq u_n \leq 2$.

Monotonie. Pour $x \in [0, 2]$,

$$\sqrt{2+x} \geq x \iff 2+x \geq x^2 \iff (2-x)(x+1) \geq 0.$$

Donc (u_n) est croissante.

Convergence. Croissante et majorée par 2, donc convergente.

Limite. Par continuité,

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \iff (\ell-2)(\ell+1) = 0.$$

Comme $\ell \in [0, 2]$, $\ell = 2$.

13. Récurrence affine

Si

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad a \neq 1,$$

le point fixe vaut

$$\ell = \frac{b}{1-a}.$$

Avec $v_n = u_n - \ell$,

$$v_{n+1} = av_n, \quad v_n = a^n(u_0 - \ell),$$

donc

$$u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell).$$

Si $|a| < 1$, alors $u_n \rightarrow \ell$.

14. Comment établir la monotonie ?

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$, trois méthodes classiques :

- calculer le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$;
- factoriser $f(x) - x$ sur l'intervalle stable ;
- si f est croissante, partir de $u_1 \geq u_0$ (ou $\leq$) et propager l'inégalité par récurrence.

15. Choisir le bon outil

Situation	Réflexe
Encadrement	Gendarmes
Monotone + borne	Limite monotone
Deux encadrements resserrés	Suites adjacentes
Oscillation	Sous-suites
Suite bornée	Bolzano–Weierstrass pour extraire
Récurrence	Stabilité, monotonie, borne, point fixe

16. Mini-exemples

Gendarmes :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Suite géométrique : si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.

Somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$

17. Checklist d'examen

Avant d'écrire « donc la suite converge », vérifier :

1. ai-je cité un théorème avec toutes ses hypothèses ?
2. si j'utilise monotonie, ai-je la bonne borne ?
3. ai-je traité toute forme indéterminée ?
4. pour une récurrence, ai-je prouvé la convergence **avant** le point fixe ?
5. le passage à la limite dans $f(u_n)$ est-il justifié par la continuité ?
6. en cas de divergence, ai-je fourni un argument précis ?

18. À savoir par cœur

- définition ε - N de $u_n \rightarrow \ell$;
- théorème des gendarmes ;
- théorème de la limite monotone ;
- théorème des suites adjacentes ;
- toute sous-suite d'une suite convergente a la même limite ;
- Bolzano–Weierstrass ;
- si $u_n \rightarrow \ell$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue, alors $\ell = f(\ell)$.

Fiche de révision — Limites et continuité

Licence 1 (L1) — définitions, théorèmes et méthodes

1. Limite en un point

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour une limite épointée : $0 < |x - a| < \eta$.

7. Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en a maisLa limite, si elle existe, est **unique**.**Limites latérales :**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

2. À l'infini / limite infinie

$$f(x) \rightarrow \ell \ (x \rightarrow +\infty) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A, \\ x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \ (x \rightarrow a) \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

3. Caractérisation séquentielle

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

ssi pour toute suite $x_n \rightarrow a$ du domaine,

$$f(x_n) \rightarrow \ell.$$

Pour prouver la non-existence : trouver deux suites $x_n, y_n \rightarrow a$ donnant deux limites d'images différentes.

4. Opérations et gendarmes

Si $f \rightarrow \ell, g \rightarrow m$:

$$f + g \rightarrow \ell + m, \quad fg \rightarrow \ell m,$$

et si $m \neq 0$,

$$\frac{f}{g} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Il faut transformer l'expression.

on pose

Gendarmes :

$$g \leq f \leq h, \quad g \rightarrow \ell, \ h \rightarrow \ell \Rightarrow \boxed{f \rightarrow \ell}.$$

5. Composition

Si $f(x) \rightarrow b$ et $g(y) \rightarrow \ell$ quand $y \rightarrow b$, alors sous les hypothèses de définition usuelles

$$\boxed{g(f(x)) \rightarrow \ell}.$$

$$\tilde{f}(a) = \ell$$

En particulier, si g est continue en b :

$$f(x) \rightarrow b \Rightarrow g(f(x)) \rightarrow g(b).$$

6. Continuité en un point

$$f \text{ continue en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Critère séquentiel :

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Somme, produit et composition conservent la continuité ; quotient si le dénominateur est non nul.

pour obtenir un prolongement continu.

8. Théorème des valeurs intermédiaires

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte.

En particulier,

$$f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = 0.$$

Attention : le TVI donne l'existence, pas l'unicité.

9. Bornes atteintes

Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists x_m, x_M \in [a, b], \quad f(x_m) = \min f, \quad f(x_M) = \max f.$$

Donc

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Le TVI remplit toutes les valeurs entre le minimum et le maximum.

Piège majeur : le résultat est faux sur un intervalle ouvert ou non borné. Exemple : $f(x) = x$ sur $]0, 1[$ n'atteint ni 0 ni 1.

10. Théorème de la bijection

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors

$$f : I \rightarrow f(I) \text{ est bijective.}$$

Sa réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone.

Pour $f(x) = y$:

1. continuité ;
2. stricte monotonie ;
3. calcul de $f(I)$;
4. existence + unicité pour tout $y \in f(I)$.

11. Continuité uniforme

f est uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in D, \\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Le même η fonctionne pour tous x, y .

Heine : continue sur $[a, b] \Rightarrow$ uniformément continue sur $[a, b]$.

12. Réflexes d'examen

- Limite : simplifier, factoriser, rationaliser, comparer.
- Non-existence : deux suites donnant deux comportements.
- Zéro : continuité + changement de signe $\Rightarrow$ TVI.
- Unicité : ajouter stricte monotonie.
- Maximum/minimum : vérifier **segment fermé borné** + continuité.
- Bijection : continuité + stricte monotonie + image.

13. Pièges classiques

- $\lim f = f(a)$ seulement si f est continue en a .
- Tester une seule suite ne suffit pas à prouver une limite.
- TVI $\nRightarrow$ unicité.
- Continue $\nRightarrow$ bornée sur un domaine quelconque.
- Une limite infinie n'est pas une valeur réelle de la fonction.

Méthodes et exemples essentiels

14. Preuve ε - η : modèle

Pour $f(x) = x^2$ en $a = 2$:

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$$

Si $|x - 2| < 1$, alors $|x + 2| < 5$. Donc

$$|x^2 - 4| < 5|x - 2|.$$

Choisir

$$\eta = \min \left(1, \frac{\varepsilon}{5} \right).$$

Alors $|x - 2| < \eta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$.

15. Non-existence par suites

Pour $f(x) = \sin(1/x)$:

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}.$$

Alors $x_n, y_n \rightarrow 0$, mais

$$f(x_n) = 1, \quad f(y_n) = -1.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) \text{ n'existe pas.}$$

16. Prolongement : modèle

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Le prolongement continu est obtenu en posant

$$f(1) = 2.$$

17. TVI + monotonie

Pour $g(x) = x^3 + x - 1$:

$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = 1 > 0.$$

Continuité sur $[0, 1] \Rightarrow$ une racine $c \in (0, 1)$.

Pour $x < y$,

$$g(y) - g(x) = (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) > 0.$$

Donc g est strictement croissante et la racine est **unique**.

18. Image d'un segment

Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$:

$$m = \min_{[a, b]} f, \quad M = \max_{[a, b]} f.$$

Puis, par TVI,

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Deux ingrédients :

- bornes **atteintes** ;
- toutes les valeurs intermédiaires **prises**.

19. Arbre de décision

On te demande « montrer qu'il existe... »

- une solution $f(x) = y$: TVI ;
- un max/min : bornes atteintes ;
- une unique solution : TVI + stricte monotonie ;
- une fonction inverse : continuité + stricte monotonie, puis déterminer $f(I)$.

Dérivabilité — L1

Définitions, règles, Rolle, accroissements finis, variations et réciproques

1. Nombre dérivé

f est dérivable en a si

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie.

Équivalent :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Tangente en a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Unilatérales : f dérivable en un point intérieur a iff $f'_-(a) = f'_+(a)$.

2. Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a .

Réciproque fautive : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais

$$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0).$$

3. Règles de dérivation

$$(f+g)' = f' + g', \quad (\lambda f)' = \lambda f',$$

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0),$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g',$$

Usuelles :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = 1/x,$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

4. Fonction réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ est bijective, $y_0 = f(x_0)$, f^{-1} continue en y_0 , f dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Cas usuel : f continue et strictement monotone sur un intervalle.

5. Dérivées successives

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

$f \in C^n(I)$: dérivées jusqu'à l'ordre n et $f^{(n)}$ continue.

6. Fermat

Si a est intérieur au domaine, f dérivable en a et f a un extremum local en a , alors

$$f'(a) = 0.$$

Attention : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour avoir un extremum (ex. x^3 en 0).

7. Théorème de Rolle

Si $a < b$ et

- f continue sur $[a, b]$;
 - f dérivable sur $]a, b[$;
 - $f(a) = f(b)$,
- alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$$

À retenir : les trois hypothèses sont indispensables.

8. TAF = égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Donc

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Preuve-type : appliquer Rolle à f moins sa droite sécante.

9. Inégalité des accroissements finis

Si $|f'(t)| \leq M$ sur l'intervalle entre x et y , alors

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Conséquence : si $|f'| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne.

Exemple : $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ car $|\cos| \leq 1$.

10. Signe de f' et variations

Sur un intervalle I :

- $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante ;
- $f' \leq 0 \Rightarrow f$ décroissante ;
- $f' > 0 \Rightarrow f$ strictement croissante ;
- $f' < 0 \Rightarrow f$ strictement décroissante ;
- $f' = 0 \Rightarrow f$ constante.

Justification : TAF entre deux points $x < y$.

11. Existence + unicité

Pour montrer que $f(x) = 0$ possède exactement une solution sur I :

- existence : souvent TVI ;
- unicité : souvent f' de signe strict $\Rightarrow$ stricte monotonie.

12. Pièges

- Rolle sans vérifier $f(a) = f(b)$.
- TAF : le point est $c \in]a, b[$, pas forcément a ou b .
- Continue $\nRightarrow$ dérivable.
- Point fixe / extremum : $f'(a) = 0$ n'est qu'une condition nécessaire sous hypothèses.
- $(f^{-1})'$: établir d'abord la bijectivité et vérifier $f' \neq 0$.
- $f'(a) > 0$ en un seul point ne prouve aucune croissance globale.

A. Étudier la dérivabilité en a

Méthode sûre :

1. écrire le taux d'accroissement ;
2. simplifier avant de prendre la limite ;
3. calculer la limite ;
4. si besoin, comparer les limites à gauche et à droite.

Exemple x^2 :

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \rightarrow 2a.$$

B. Appliquer Rolle / TAF

Toujours écrire explicitement :

- « f est continue sur $[a, b]$ » ;
- « f est dérivable sur $]a, b[$ » ;
- pour Rolle : « $f(a) = f(b)$ ».

Puis seulement : « donc il existe $c \in]a, b[$ tel que... »

C. Prouver une monotonie

Pour $x < y$, le TAF donne

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Comme $y - x > 0$, le signe de $f(y) - f(x)$ est celui de $f'(c)$.

D. Prouver une inégalité

Deux schémas fréquents :

- poser $g =$ membre droit – membre gauche, puis étudier g' ;
- utiliser l'IAF si l'on sait borner $|f'|$.

Exemple :

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

E. Dériver une réciproque

Checklist :

- f bijective de I sur J ;
- identifier $x_0 = f^{-1}(y_0)$;
- vérifier $f'(x_0) \neq 0$;
- appliquer

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ex. : $f(x) = e^x \Rightarrow (\ln)'(y) = 1/y$.

F. Tableau mental des hypothèses

Rolle	continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b)$
TAF	continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
IAF	TAF + borne sur $ f' $
Fermat	extremum local intérieur + dérivabilité
Inverse	bijektivité, continuité de l'inverse au point, $f'(x_0) \neq 0$

G. Exemple complet express

Pour $f(x) = x + 1/x$ sur $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Donc f décroît sur $]0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$. Minimum en 1 :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0).$$

H. Vrai / faux éclair

- « continue $\Rightarrow$ dérivable » : **faux**.
- « dérivable $\Rightarrow$ continue » : **vrai**.
- « $f' = 0$ sur un intervalle $\Rightarrow f$ constante » : **vrai**.
- « $f'(a) = 0 \Rightarrow a$ extremum » : **faux**.
- « $f' > 0$ partout $\Rightarrow f$ strictement croissante » : **vrai**.
- « f strictement croissante $\Rightarrow f' > 0$ partout » : **faux**.

I. Rédaction attendue en L1

Ne pas écrire seulement « d'après le cours ». Nommer le théorème et vérifier ses hypothèses. Exemple :

« f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

»

J. Formules à savoir sans hésiter

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)g',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \text{si } |f'| \leq M.$$

Fonctions usuelles et réciproques — L1

Exp, ln, puissances, arcsin/arccos/arctan, hyperboliques et compositions

1. Exponentielle

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = 1/e^x.$$

$$(e^x)' = e^x > 0$$

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est strictement croissante et bijective.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Composition :

$$(e^u)' = u' e^u.$$

Inégalité : $e^x \geq 1 + x$.

2. Logarithme

ln est la réciproque de exp :

$$\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0).$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty.$$

Pour $\ln(u)$: exiger $u > 0$ et

$$(\ln u)' = u'/u.$$

3. Puissances réelles

Pour $\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Si $\alpha > 0$: croissante ; si $\alpha < 0$: décroissante sur $]0, \infty[$.

Attention : pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$, le domaine n'est pas automatiquement tout $\mathbb{R}$.

4. Croissances comparées

Pour $\alpha, \beta > 0$:

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$x^\alpha = o(e^{\beta x}) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Donc

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \rightarrow 0, \quad \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \rightarrow 0.$$

Aussi : $x^\alpha |\ln x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.

5. Principe de réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ est bijective :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_I, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_J.$$

Si $f'(x_0) \neq 0$:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Ne pas confondre f^{-1} et $1/f$.

6. Arcsinus

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Sur $] -1, 1[$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Impaire, strictement croissante.

7. Arccosinus

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

$$\cos(\arccos x) = x.$$

Sur $] -1, 1[$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Strictement décroissante et

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

8. Arctangente

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[.$$

$$\tan(\arctan x) = x.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Impaire, strictement croissante.

$$\arctan x \rightarrow \pm\pi/2 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

9. Intervalles principaux

$$\arcsin(\sin x) = x$$

si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. (dans la formule directe).

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

$$\arctan(\tan x) = x$$

pour $x \in] -\pi/2, \pi/2[$. Hors de ces intervalles, il faut ramener l'angle dans l'intervalle principal.

9 bis. Valeurs remarquables

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arctan 0 = 0, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Utiliser imparité de arcsin et arctan pour les valeurs négatives.

9 ter. Repères graphiques

arcsin : croissante de $-\pi/2$ à $\pi/2$ sur $[-1, 1]$.

arccos : décroissante de π à 0 sur $[-1, 1]$.

arctan : croissante sur $\mathbb{R}$, asymptotes $y = \pm\pi/2$.

10. Simplifications utiles

Pour $x \in [-1, 1]$:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Pour $|x| < 1$:

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Le signe de la racine vient de l'intervalle principal de l'angle.

11. Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Identité :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Parité : ch paire ; sh , th impaires.

12. Dérivées hyperboliques

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.$$

sh et th sont strictement croissantes.
 ch a un minimum en 0 : $\operatorname{ch} 0 = 1$.

$$\operatorname{th} x \rightarrow \pm 1 \quad (x \rightarrow \pm \infty).$$

13. Compositions : dérivées

Pour u dérivable :

$$(e^u)' = u'e^u, \quad (\ln u)' = u'/u,$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u',$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}},$$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$$

Toujours vérifier le domaine.

14. Méthode : simplifier

Ex. $\sin(\arccos x)$:

1. poser $\theta = \arccos x$;
2. noter $\theta \in [0, \pi]$;
3. $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2$;
4. sur $[0, \pi]$, $\sin \theta \geq 0$;
5. donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

15. Méthode : étudier une fonction

Checklist :

1. domaine ;
2. parité/symétrie ;
3. limites ;
4. dérivée et signe ;
5. variations ;
6. asymptotes ;
7. valeurs remarquables ;
8. tracé qualitatif.

16. Exemples éclairés

1. $f(x) = \ln(1 + e^x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0.$$

2. $g(x) = \arctan(x^2)$:

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}.$$

3. $h(x) = e^{-x^2}$:

$$h'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

17. Pièges classiques

- $\ln u$ sans vérifier $u > 0$.
- x^α sur $x < 0$ sans vérifier que cela a un sens.
- $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout x : faux.
- oublier le signe dans $\sqrt{1 - x^2}$.
- dériver $\arcsin$ ou $\arccos$ aux extrémités ± 1 avec la formule usuelle.
- confondre $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ avec l'identité circulaire $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

18. À savoir par cœur

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln(e^x) = x$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Hiérarchie à $+\infty$:

$$\ln x \ll x^\alpha \ll e^{\beta x} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

19. Limites de référence en 0

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\ln(1 + x)}{x} \rightarrow 1,$$

$$\frac{\arcsin x}{x} \rightarrow 1, \quad \frac{\arctan x}{x} \rightarrow 1.$$

Donc, au voisinage de 0 :

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x.$$

20. Formes hyperboliques utiles

$$\operatorname{th} x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}.$$

$$\text{À } +\infty : \operatorname{ch} x \sim \operatorname{sh} x \sim e^x/2.$$

21. Réflexe domaine

Avant de calculer :

- $\ln u$: $u > 0$;
- $\sqrt{u}$: $u \geq 0$;
- $\arcsin u, \arccos u$: $|u| \leq 1$;
- dérivées de $\arcsin u, \arccos u$: $|u| < 1$;
- puissance réelle u^α : si l'on utilise $e^{\alpha \ln u}$, exiger $u > 0$.

Développements limités et formules de Taylor — L1

Comparaisons, Taylor-Young, DL usuels, opérations, limites et asymptotes

1. Comparaisons

Quand $x \rightarrow a$:

$$f = o(g) \iff \frac{f}{g} \rightarrow 0.$$

$$f = O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ reste borné.}$$

$$f \sim g \iff \frac{f}{g} \rightarrow 1.$$

Et $f \sim g \iff f = g + o(g)$.

$\sim$ se manipule bien dans les produits/-quotients, **pas dans les sommes** en général.

2. Définition d'un DL

DL d'ordre n en a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Le DL, s'il existe, est unique.

Pour se ramener en 0, poser $h = x - a$ et développer $f(a+h)$.

3. Taylor-Young

Sous les hypothèses usuelles :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

À l'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o(h^2).$$

4. DL usuels : exp, ln

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

Donc :

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

5. Sinus et cosinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Ainsi

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Parité : sin n'a que des puissances impaires, cos que des paires.

6. Puissances et inverse

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

7. DL dérivés utiles

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

8. Somme et produit

Somme : mettre les DL au même ordre, puis additionner.

Produit : multiplier les polynômes et supprimer les degrés $> n$.

Ex. ordre 3 :

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

9. Quotient

Si le dénominateur tend vers une constante non nulle, utiliser

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

S'il tend vers 0, **factoriser d'abord** le premier terme non nul :

$$\frac{x^p(A+\dots)}{x^q(B+\dots)} = x^{p-q} \frac{A+\dots}{B+\dots}.$$

10. Composition

Pour $F(u(x))$:

1. vérifier $u(x) \rightarrow 0$;
2. écrire le DL de $F(t)$;
3. remplacer t par $u(x)$;
4. développer et tronquer.

Ex. :

$$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

11. Primitivation

Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n),$$

alors une primitive F vérifie

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

Utile pour $\ln(1+x)$, $\arctan x$, etc.

12. Limites : méthode

1. repérer les compensations ;
 2. choisir l'ordre minimal utile ;
 3. développer au même ordre ;
 4. factoriser le premier terme non nul.
- $$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \frac{\sin x - x}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}.$$

13. Tangente et position

Tangente en a :

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si

$$f(x) - T(x) = c_p (x-a)^p + o((x-a)^p),$$

le premier terme non nul donne la position locale.

p pair : même côté des deux côtés. p impair : traversée de la tangente.

14. À l'infini

Pour $x \rightarrow +\infty$, poser

$$u = 1/x.$$

Factoriser d'abord la puissance dominante.

Ex. :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + x} &= x\sqrt{1 + 1/x} \\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).\end{aligned}$$

Asymptote : $y = x + 1/2$.

15. Équivalents usuels

Quand $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim x^2/2,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 0).$$

Utiliser surtout dans produits/quotients.

16. Pièges à éviter

- $\sim$ n'est pas une égalité.
- Ne pas remplacer un terme par un équivalent dans une somme avec compensation.
- Ne pas composer une équivalence sans justification.
- Ne pas additionner des DL d'ordres différents sans tronquer.
- Un DL trop court ne voit pas le premier terme survivant.
- Dans une composition, vérifier le centre du DL.

17. Ordre à choisir

Principe : aller jusqu'au **premier terme non nul après simplification**.

Ex. pour

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3},$$

il faut e^x à l'ordre 3 :

$$\boxed{\text{limite} = 1/6.}$$

18. Contrôles rapides

Avant de conclure :

- ordre du reste correct ?
- parité respectée ?
- termes de degré $> n$ supprimés ?
- dénominateur inversé avec terme constant non nul ?
- signe du premier terme cohérent ?

19. Calculs avec o

Pour $p, q > 0$:

$$o(x^p) + o(x^p) = o(x^p),$$

$$x^q o(x^p) = o(x^{p+q}).$$

Si $p < q$, alors $x^q = o(x^p)$ en 0.

Toujours comparer les restes au **même point** et dans la même variable.

20. Premier terme non nul

Si

$$f(x) = a_p x^p + o(x^p), \quad a_p \neq 0,$$

alors

$$\boxed{f(x) \sim a_p x^p.}$$

C'est le moyen standard d'extraire un équivalent à partir d'un DL.

21. DL en un point a

Poser $h = x - a$. Exemple :

$$\ln x = \ln(1+h), \quad h = x-1,$$

d'où, lorsque $x \rightarrow 1$,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

22. Trois limites flash

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

$$\frac{\tan x - x}{x^3} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

Le DL doit atteindre le premier terme qui subsiste.

23. Taylor–Young vs reste borné

Taylor–Young donne un reste **asymptotique** :

$$R_n(h) = o(h^n).$$

Il sert surtout aux équivalents et limites.

Les formules de Taylor avec reste explicite (ex. Taylor–Lagrange) répondent à une autre question : **majorer l'erreur** sur un intervalle.

24. Checklist avant calcul

1. Où tend la variable ?
2. Quel est le centre du DL ?
3. Jusqu'à quel ordre faut-il aller ?
4. Y a-t-il une compensation ?
5. Le reste final est-il assez petit ?
6. Peut-on conclure par le premier terme non nul ?

Fiche de révision – Intégrale de Riemann

Licence 1 – Définitions, théorèmes, techniques de calcul et pièges

Construction et sommes de Riemann

Subdivision : $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

Fonction en escalier : constante sur chaque $]x_k, x_{k+1}[$.
Si sa valeur est c_k ,

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k).$$

Pour f bornée, sur $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \inf f, \quad M_k = \sup f.$$

Sommes de Darboux :

$$S_- = \sum m_k \Delta x_k, \quad S_+ = \sum M_k \Delta x_k.$$

Riemann-intégrable :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma, \quad S_+ - S_- < \varepsilon.$$

Toute fonction continue ou continue par morceaux sur un segment est intégrable.

Somme de Riemann régulière

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Cas-type :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(k/n) \rightarrow \int_0^1 \Phi(x) \, dx.$$

Propriétés de l'intégrale

Linéarité :

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

Chasles :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad \int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Si $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Si $m \leq f \leq M$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Majorations :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

et, si $|f| \leq M$,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a).$$

Valeur moyenne. Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b-a).$$

Cauchy–Schwarz

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

Théorème fondamental

Si f est continue et

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt,$$

alors

$$F'(x) = f(x), \quad F(a) = 0.$$

Si G est une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a).$$

Primitives essentielles

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Formes composées :

$$\int u' e^u = e^u + C, \quad \int \frac{u'}{u} = \ln |u| + C.$$

Intégration par parties

Si $u, v \in C^1([a, b])$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Bon choix : dériver ce qui se simplifie (polynôme, ln, fonction inverse) et primitiver ce qui est facile (e^x , sin, cos).

Exemple :

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = 1.$$

Changement de variable

Si $x = \varphi(t)$ avec $\varphi \in C^1$ bijective et monotone :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt$$

avec $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Procédure : poser la nouvelle variable, calculer le différentiel, transformer *tout* l'intégrande, puis changer les bornes.

Exemple : $u = x^2$ dans

$$\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx = \int_0^1 e^u \, du = e - 1.$$

Fractions rationnelles

Pour P/Q :

- division euclidienne si $\deg P \geq \deg Q$;
- factorisation de Q ;
- décomposition en éléments simples ;
- intégration terme à terme.

Exemple :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Trigonométrie

Identités :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Si une puissance de sin ou cos est impaire, isoler souvent un facteur pour une substitution.

Symétries

Sur $[-a, a]$:

$$f \text{ paire} \Rightarrow \int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

$$f \text{ impaire} \Rightarrow \int_{-a}^a f = 0.$$

Pièges à éviter

- Après une substitution, **changer les bornes** ou revenir à la variable initiale avant l'évaluation.
- En IPP, ne pas oublier le terme $[uv]_a^b$.
- $\int_a^b f$ est une aire **algébrique**, pas toujours positive.
- Une primitive F donne $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, pas $F(a) - F(b)$.
- Vérifier les hypothèses du changement de variable (C^1 , bijectivité/monotonie dans la version utilisée).

Réflexes d'examen

- Somme avec $1/n$ et $k/n \Rightarrow$ penser **somme de Riemann**.
- Produit avec polynôme, ln, arctan $\Rightarrow$ tester une **IPP**.
- Une dérivée interne apparaît $\Rightarrow$ tester une **substitution**.
- Fraction rationnelle $\Rightarrow$ **éléments simples**.
- Intervalle symétrique $[-a, a] \Rightarrow$ regarder la **parité**.

Fiche de révision – Équations différentielles linéaires

Licence 1 – Ordre 1, ordre 2, Cauchy, solutions particulières et résonance

Structure à retenir

Pour une équation linéaire

$$L(y) = f,$$

on résout d'abord l'homogène $L(y) = 0$, puis on trouve *une* solution particulière y_p :

$$y = y_h + y_p.$$

Si y_1, y_2 sont solutions homogènes, toute combinaison linéaire $\lambda y_1 + \mu y_2$ l'est encore.

$\Delta > 0$: racines $r_1 \neq r_2$

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

$\Delta = 0$: racine double r_0

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}.$$

$\Delta < 0$: racines $\alpha \pm i\beta$

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$

Sur un intervalle I , avec a, b continues. Soit A une primitive de a .

Homogène

$$y_h = C e^{-A(x)}.$$

Facteur intégrant : $e^{A(x)}$ car

$$(e^A y)' = e^A (y' + ay).$$

Formule générale :

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(C + \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt \right).$$

Variation de la constante : remplacer C dans $C e^{-A}$ par une fonction $C(x)$.

Problème de Cauchy

$$y(x_0) = y_0$$

fixe une unique valeur de C . Si a, b sont continues, il existe une unique solution sur I .

Méthode :

1. normaliser le coefficient de y' à 1 ;
2. calculer A avec $A' = a$;
3. écrire y_h ;
4. trouver y_p ;
5. appliquer la condition initiale à la fin.

Ordre 2 homogène

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0.$$

Équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Solutions particulières

Pour

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

choisir une forme de y_p adaptée à f .

$f(x)$	essai sans résonance
$P_m(x)$	$Q_m(x)$
$P_m(x)e^{\lambda x}$	$Q_m(x)e^{\lambda x}$
$P_m \cos \omega x + Q_m \sin \omega x$	$A_m \cos \omega x + B_m \sin \omega x$

Résonance : piège majeur

Si l'essai choisi est déjà lié à une solution de l'homogène, il faut le multiplier par une puissance de x .

Pour un second membre $P_m(x)e^{\lambda x}$:

$$y_p = x^s Q_m(x) e^{\lambda x},$$

où s est la multiplicité de λ comme racine de l'équation caractéristique.

Ordre 2 : $s = 0, 1$ ou 2 .

Forme générale :

$$\begin{aligned} f &= e^{\alpha x} (P_m \cos \beta x + Q_m \sin \beta x) \\ \Rightarrow y_p &= x^s e^{\alpha x} (A_m \cos \beta x + B_m \sin \beta x). \end{aligned}$$

Exemple :

$$y'' - y = e^x.$$

Comme 1 est racine simple de $r^2 - 1$, on ne prend pas Ae^x mais

$$y_p = Axe^x.$$

On obtient $A = \frac{1}{2}$.

Cauchy d'ordre 2

Deux conditions initiales sont nécessaires :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0.$$

Pour $a \neq 0$ et f continue, elles déterminent une unique solution.

Procédure :

1. écrire $y = y_h + y_p$;
2. calculer y' ;
3. substituer $x = x_0$;
4. résoudre le système en C_1, C_2 .

Exemples flash

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

3. $y'' + 4y = 0$

$$r = \pm 2i \Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

4. $y'' - y = \cos x$

$$y_p = A \cos x + B \sin x \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Erreurs à éviter

- oublier la solution particulière quand $f \neq 0$;
- écrire $Ce^{-a(x)}$ au lieu de $Ce^{-A(x)}$ avec $A' = a$;
- oublier le facteur x en cas de résonance ;
- oublier $xe^{r_0 x}$ pour une racine double ;
- chercher les constantes avant d'avoir la solution générale ;
- ne pas vérifier la solution dans l'équation initiale.

Checklist examen

1. Quel est l'ordre ? L'équation est-elle linéaire ?
2. Quelle est l'équation homogène ?
3. Ordre 1 : quel est A tel que $A' = a$?
4. Ordre 2 : quelles sont les racines caractéristiques ?
5. Quelle forme choisir pour y_p ?
6. Y a-t-il résonance ?
7. Écrire $y = y_h + y_p$.
8. Appliquer les données de Cauchy.
9. Vérifier par substitution.

Formule-clé ordre 1

$$y' + ay = b \Rightarrow y = e^{-A} \left(C + \int e^A b \right), \quad A' = a.$$

Nombres complexes – L1

Formes, exponentielle, racines, second degré et géométrie

1. Forme algébrique

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \Re z = x, \quad \Im z = y.$$

$$\bar{z} = x - iy, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$z\bar{z} = |z|^2, \quad |zw| = |z||w|, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{w}.$$

Si $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Distance : $|z - a|$ est la distance entre les points d'affixes z et a .

Inégalités

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

2. Argument et exponentielle

Pour $z \neq 0$:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r = |z| > 0.$$

$$\arg z = \theta \pmod{2\pi}.$$

L'argument principal $\text{Arg } z$ est souvent choisi dans $] -\pi, \pi]$.**Piège :** 0 n'a pas d'argument, et l'argument d'un complexe non nul n'est pas unique.

Produit et quotient :

$$(re^{i\theta})(\rho e^{i\varphi}) = r\rho e^{i(\theta+\varphi)},$$

$$\frac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}.$$

3. Euler et Moivre

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Donc, si $z = re^{i\theta}$,

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Angle moitié

$$e^{ia} + e^{ib} = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(a+b)/2},$$

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(a+b)/2}.$$

4. Linéarisation

À connaître :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Méthode générale : remplacer $\cos x$ et $\sin x$ par les formules d'Euler, développer, regrouper les exponentielles opposées, puis revenir aux fonctions trigonométriques.

5. Racines n -ièmes

Si

$$a = \rho e^{i\theta} \neq 0,$$

les solutions de $z^n = a$ sont

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Elles forment un polygone régulier centré en 0.

Piège : ne pas donner une seule racine. Pour $a \neq 0$, il y en a exactement n distinctes.

6. Racines de l'unité

$$\omega_k = e^{2ki\pi/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Si $\omega = e^{2i\pi/n}$:

$$\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}.$$

Pour $n \geq 2$:

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

Plus généralement,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^m = \begin{cases} n, & n \mid m, \\ 0, & n \nmid m. \end{cases}$$

7. Second degré dans $\mathbb{C}$

Pour

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0,$$

poser

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Choisir δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Pour $\delta = x + iy$ et $\Delta = u + iv$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v, \end{cases} \quad x^2 + y^2 = |\Delta|.$$

Donc

$$x^2 = \frac{|\Delta| + u}{2}, \quad y^2 = \frac{|\Delta| - u}{2},$$

avec le signe de xy imposé par v .

Dans $\mathbb{C}$, on ne discute jamais « le signe » de Δ : les complexes ne sont pas ordonnés.

8. Géométrie : $z' = az + b$

Si $a = 1$: translation de vecteur d'affixe b .

Si $a \neq 1$, point fixe :

$$\omega = \frac{b}{1-a}.$$

Puis

$$z' - \omega = a(z - \omega).$$

Avec $a = |a|e^{i\theta}$: similitude directe de centre ω , rapport $|a|$, angle θ .

Cas particuliers : $|a| = 1$: rotation ; $a > 0$ réel : homothétie.

9. Lieux géométriques

- $|z - a| = r$: cercle de centre a , rayon r .
- $|z - a| = |z - b|$: médiatrice de $[AB]$.
- $(z - a)/(z - b) \in \mathbb{R}$: alignement de A, B, M (avec $z \neq b$).

10. Réflexes d'examen

- Produits, quotients, puissances, racines $\Rightarrow$ forme exponentielle.
- Sommes, conjugués, équations en $x, y \Rightarrow$ forme algébrique.
- Toujours repérer les valeurs interdites.
- Pour un argument, vérifier le quadrant.
- Pour $z^n = a$, faire varier k sur $0, \dots, n-1$.
- Pour $az + b$, chercher le point fixe si $a \neq 1$.

11. À savoir par coeur

$$i^2 = -1, \quad z\bar{z} = |z|^2, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad z_k = \rho^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}.$$

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ Licence 1 - Fiche de révision

1. Divisibilité

$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z}, b = ak.$

Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors

$$a \mid (ub + vc) \quad (\forall u, v \in \mathbb{Z}).$$

2. Division euclidienne

Pour $b \neq 0$, il existe un unique (q, r) :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Et $b \mid a \iff r = 0.$

3. PGCD / PPCM

$d = \text{pgcd}(a, b) > 0$ divise a, b et est multiple de tout diviseur commun.

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a - qb).$$

$$\text{pgcd}(a, b) \text{ ppcm}(a, b) = |ab|.$$

4. Euclide et Bézout

Euclide : le dernier reste non nul est le PGCD.

Si $d = \text{pgcd}(a, b)$:

$$\exists u, v \in \mathbb{Z}, au + bv = d.$$

En particulier

$$\text{pgcd}(a, b) = 1 \iff \exists u, v, au + bv = 1.$$

Les coefficients se trouvent en remontant Euclide.

5. Équation $ax + by = c$

Solutions entières ssi

$$\text{pgcd}(a, b) \mid c.$$

Si (x_0, y_0) est une solution et $d = \text{pgcd}(a, b)$:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}k, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}k,$$

avec $k \in \mathbb{Z}.$

6. Lemme de Gauss

$$a \mid bc, \text{ pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c.$$

Si p est premier :

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

7. Facteurs premiers

Tout $n \geq 2$: $n = \prod p^{\alpha_p}$ de manière unique.

Si $a = \prod p^{\alpha_p}, b = \prod p^{\beta_p}$:

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod p^{\min(\alpha_p, \beta_p)},$$

$$\text{ppcm}(a, b) = \prod p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}.$$

Primalité : tester les premiers $p \leq \sqrt{n}.$

8. Congruences

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b).$$

Compatibles avec $+, -, \times$, puissances.

Attention à la simplification

De $ac \equiv bc \pmod{n}$, on peut conclure $a \equiv b \pmod{n}$ si

$$\text{pgcd}(c, n) = 1.$$

Sinon, il faut adapter le module. Ex. :

$$2x \equiv 2y \pmod{4} \Rightarrow x \equiv y \pmod{2},$$

pas forcément modulo 4.

9. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et inverses

Classes : $\bar{0}, \dots, \bar{n-1}.$

$$\bar{a} \text{ inversible} \iff \text{pgcd}(a, n) = 1.$$

Si $au + nv = 1$, alors

$$a^{-1} \equiv u \pmod{n}.$$

10. Résoudre $ax \equiv b \pmod{n}$

Poser $d = \text{pgcd}(a, n).$

- $d \nmid b$: aucune solution.
 - $d \mid b$: diviser a, b, n par d , puis inverser a/d modulo n/d .
- Il y a alors d classes de solutions modulo n .

11. Petit théorème de Fermat

Si p premier et $p \nmid a$:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Méthodes, exemples et pièges

A. Euclide étendu

Pour 252, 198 :

$$252 = 198 + 54,$$

$$198 = 3 \cdot 54 + 36, \quad 54 = 36 + 18.$$

Donc $\text{pgcd} = 18$ et

$$18 = 54 - 36 = 4 \cdot 54 - 198$$

$$= \boxed{4 \cdot 252 - 5 \cdot 198}.$$

B. Trouver un inverse

Inverse de 7 modulo 15 :

$$1 = 15 - 2 \cdot 7.$$

Donc

$$\boxed{7^{-1} \equiv -2 \equiv 13 \pmod{15}}.$$

C. Congruence linéaire

$6x \equiv 9 \pmod{15}$. Comme $d = 3$:

$$2x \equiv 3 \pmod{5}.$$

Or $2^{-1} \equiv 3 \pmod{5}$, donc

$$x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Modulo 15 :

$$\boxed{x \equiv 4, 9, 14 \pmod{15}}.$$

D. Fermat - exemple

$3^{2026} \pmod{7}$. Comme $3^6 \equiv 1$ et

$$2026 = 6 \cdot 337 + 4,$$

$$3^{2026} \equiv 3^4 = 81 \equiv \boxed{4} \pmod{7}.$$

E. Divisibilité par combinaison

Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors

$$\boxed{d \mid (ua + vb) \quad \forall u, v \in \mathbb{Z}}.$$

C'est le mécanisme central d'Euclide et de Bézout.

F. Réflexes d'examen

- PGCD : Euclide.
- Inverse modulo n : Bézout.
- $p \mid ab$: Gauss.
- $ax \equiv b$: calculer $\text{pgcd}(a, n)$.
- Grande puissance modulo p premier : Fermat/cycles.
- Simplifier : vérifier l'inversibilité.

G. 6 pièges classiques

- $a \equiv b \pmod{n}$ signifie $n \mid (a - b)$.
- Ne pas diviser une congruence sans condition.
- Fermat : le module doit être premier.
- Dans a^{p-1} , il faut aussi $p \nmid a$.
- $\text{pgcd}(a, b)$ est positif par convention.
- $ax \equiv b \pmod{n}$ peut avoir plusieurs classes solutions.

H. Formules à savoir

$$\boxed{\text{pgcd}(a, b) \text{ ppcm}(a, b) = |ab|}$$

$$\boxed{\text{pgcd}(a, b) = 1 \iff \exists u, v, au + bv = 1}$$

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a - b)}$$

$$\boxed{\bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \iff \text{pgcd}(a, n) = 1}$$

$$\boxed{p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}}$$

I. Mini-checklist rédaction

Avant de conclure, écrire explicitement :

- le module considéré ;
- le PGCD utile ;
- l'hypothèse de coprimalité si Gauss/-simplification ;
- l'identité de Bézout si un inverse est utilisé ;
- la classe finale sous la forme $x \equiv r \pmod{n}$.

Polynômes et fractions rationnelles

Licence 1 - Fiche de révision

1. Polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

$P = Q$ ssi tous les coefficients coïncident.

Si $P \neq 0$: degré = $\max\{k : a_k \neq 0\}$.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Polynôme $\neq$ fonction

$P \in \mathbb{K}[X]$ est formel. La fonction associée est $x \mapsto P(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, même fonction polynomiale $\Rightarrow$ mêmes coefficients, mais ce n'est pas la définition de P .

2. Division euclidienne

Pour $B \neq 0$, il existe un unique (Q, R) :

$$A = BQ + R$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$. $B \mid A \iff R = 0$.

3. Théorème du reste

Division par $X - a$:

$$P = (X - a)Q + P(a).$$

Donc

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P.$$

4. PGCD et Bézout

PGCD choisi unitaire.

$$\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$$

si $A = BQ + R$.

Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$:

$$AU + BV = \text{pgcd}(A, B).$$

Coprimauté : $\text{pgcd}(A, B) = 1$ ssi $AU + BV = 1$.

5. Multiplicité

a racine de multiplicité m :

$$P = (X - a)^m Q, \quad Q(a) \neq 0.$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Racine multiple $\iff P(a) = P'(a) = 0$.

6. Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré n a **au plus n racines distinctes**.

Dans $\mathbb{C}$, il a exactement n racines en comptant les multiplicités.

7. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant a une racine complexe.

$$P = a_n \prod_j (X - z_j)^{m_j}.$$

Somme des multiplicités = $\deg P$.

8. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Facteurs irréductibles :

- $X - a$, $a \in \mathbb{R}$;
- $X^2 + pX + q$ avec $\Delta < 0$.

Les racines complexes non réelles vont par paires conjuguées.

9. Viète

Si $P = a_n \prod_{j=1}^n (X - r_j)$:

$$\sum r_j = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\prod r_j = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Pour $aX^2 + bX + c$:

$$r_1 + r_2 = -b/a, \quad r_1 r_2 = c/a.$$

Fractions rationnelles - méthodes et pièges

10. Fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q}, \quad Q \neq 0.$$

Réduire d'abord les facteurs communs.
Forme propre si

$$\deg P < \deg Q.$$

11. Partie entière

Division $P = QS + R$:

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}, \quad \deg R < \deg Q.$$

Toujours faire cette étape avant les éléments simples si la fraction n'est pas propre.

12. Pôles

Dans une forme irréductible, les zéros de Q sont les pôles.

Si

$$Q = (X - a)^m S, \quad S(a) \neq 0,$$

a est un pôle d'ordre m .

Racine : numérateur. **Pôle** : dénominateur.

13. Éléments simples sur $\mathbb{C}$

Si

$$Q = \prod_j (X - a_j)^{m_j},$$

alors

$$\frac{P}{Q} = \sum_j \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(X - a_j)^k}$$

pour la partie propre.

14. Éléments simples sur $\mathbb{R}$

Facteur linéaire $(X - a)^m$:

$$\frac{A_1}{X - a} + \dots + \frac{A_m}{(X - a)^m}.$$

Quadratique irréductible q^m :

$$\frac{B_1 X + C_1}{q} + \dots + \frac{B_m X + C_m}{q^m}.$$

15. Trouver les coefficients

Après multiplication par le dénominateur commun :

- substituer les racines simples ;
- identifier les coefficients ;
- utiliser éventuellement le comportement à l'infini.

Puis recomposer pour vérifier.

Exemple 1

$$\frac{2X + 3}{(X - 1)(X + 2)} = \frac{A}{X - 1} + \frac{B}{X + 2}.$$

$$X = 1 \Rightarrow A = 5/3.$$

$$X = -2 \Rightarrow B = 1/3.$$

$$F = \frac{5}{3(X - 1)} + \frac{1}{3(X + 2)}.$$

Exemple 2 - facteur multiple

$$\frac{X + 1}{X(X - 1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X - 1} + \frac{C}{(X - 1)^2}.$$

On trouve

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

Exemple 3 - quadratique

$$\frac{1}{X(X^2 + 1)} = \frac{A}{X} + \frac{BX + C}{X^2 + 1}.$$

Identification :

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Donc $F = 1/X - X/(X^2 + 1)$.

Checklist de décomposition

1. Simplifier.
2. Extraire la partie entière.
3. Factoriser Q dans le corps demandé.
4. Écrire **tous** les étages.
5. Calculer les coefficients.
6. Vérifier.

Pièges à éviter

- Oublier les puissances intermédiaires d'un facteur multiple.
- Mettre une constante au-dessus d'un quadratique réel : il faut $BX + C$.
- Dire "degré $n = n$ racines réelles" : faux.
- Chercher les pôles avant simplification.

À savoir par cœur

$$P(a) = 0 \iff (X - a) \mid P.$$

Multiplicité m :

$$(X - a)^m \mid P,$$

mais $(X - a)^{m+1} \nmid P$.

$\mathbb{C}[X]$: facteurs linéaires.

$\mathbb{R}[X]$: facteurs linéaires et quadratiques irréductibles ($\Delta < 0$).

Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Licence 1 - Fiche de révision

1. Écriture matricielle

Système de n équations à p inconnues :

$$AX = B, \quad A \in M_{n,p}.$$

Matrice augmentée : $[A \mid B]$.

Compatible : au moins une solution. Homogène : $B = 0$.

2. Opérations élémentaires

$$L_i \leftrightarrow L_j,$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0),$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

Elles conservent exactement l'ensemble des solutions.

3. Forme échelonnée

Pivot = premier coefficient non nul d'une ligne.

Échelonnée : pivots décalés vers la droite, zéros sous eux.

Réduite : pivots = 1 et seuls non nuls de leur colonne.

4. Algorithme de Gauss

1. Écrire $[A \mid B]$.
2. Choisir un pivot non nul.
3. Annuler sous le pivot.
4. Recommencer.
5. Remonter.
6. Paramétrer les variables libres.

5. Ligne contradictoire

Si l'échelonnement donne

$$(0 \cdots 0 \mid c), \quad c \neq 0,$$

alors le système est **incompatible**.

En revanche $(0 \cdots 0 \mid 0)$ n'ajoute aucune contrainte.

6. Rang

$$\text{rg}(A) = \text{nombre de pivots.}$$

Pour $A \in M_{n,p}$:

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes.

7. Rouché-Capelli

$$\text{rg}(A) = \text{rg}([A \mid B])$$

$\iff$ système compatible.

Si compatible :

$$\# \text{ paramètres libres} = p - \text{rg}(A).$$

8. Trois cas

Pour p inconnues :

- $\text{rg}(A) < \text{rg}([A \mid B])$: aucune solution ;
- rangs égaux = p : solution unique ;
- rangs égaux $< p$: infinité de solutions.

9. Variables principales/libres

Colonne pivot $\Rightarrow$ variable principale.

Pas de pivot $\Rightarrow$ variable libre.

Une variable libre se paramètre ; elle ne vaut pas automatiquement 0.

Structure des solutions et applications

10. Système homogène

$$AX = 0$$

a toujours $X = 0$.

$$\dim \text{Ker}(A) = p - \text{rg}(A).$$

Si $p > n$, alors $\text{rg}(A) \leq n < p$, donc il existe des solutions non nulles.

11. Solution générale

Si $AX = B$ est compatible et X_p est une solution particulière :

$$\mathcal{S} = X_p + \text{Ker}(A).$$

Donc toute solution s'écrit

$$X = X_p + X_h, \quad AX_h = 0.$$

12. Système carré

Pour $A \in M_n$:

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n.$$

Alors, pour tout B ,

$$AX = B$$

a une unique solution

$$X = A^{-1}B.$$

Avec déterminant : $\det A \neq 0$.

13. Inverse par Gauss-Jordan

Former

$$[A \mid I_n]$$

et réduire le bloc gauche :

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Si on ne peut obtenir I_n , A n'est pas inversible.

14. Base de $\text{Ker}(A)$

Résoudre $AX = 0$, choisir les variables libres comme paramètres, puis écrire

$$X = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

Alors

$$(v_1, \dots, v_k) \text{ est une base du noyau.}$$

15. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$: intersection de droites.

Dans $\mathbb{R}^3$: intersection de plans.

Cas possibles : aucune solution, un point, ou une infinité (droite/plan selon le contexte).

16. Pièges classiques

- oublier de transformer le second membre ;
- confondre ligne nulle et contradiction ;
- poser une variable libre égale à 0 sans raison ;
- croire qu'un système homogène peut être sans solution ;
- lire une base de colonnes dans la matrice transformée au lieu de la matrice initiale.

17. Exemple express

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ une seule équation indépendante.

Avec $y = s, z = t$:

$$x = 1 - 2s + t.$$

Donc

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(1, 0, 1).$$

18. À savoir rédiger

Toujours conclure par une phrase ou un ensemble explicite :

$$\mathcal{S} = \{\dots\}.$$

En cas d'incompatibilité, citer la ligne $0 = c$.

En cas de paramètres, préciser leur domaine, par ex. $s, t \in \mathbb{R}$.

Calcul matriciel

Licence 1 - Fiche de révision

1. Formats et opérations

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: n lignes, p colonnes.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Égalité : même format et mêmes coefficients.

2. Produit matriciel

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$:

$$AB \in \mathcal{M}_{n,q},$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Mémo : **ligne** $\times$ **colonne**. Les dimensions intérieures doivent coïncider.

3. Propriétés du produit

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

En général :

$$AB \neq BA.$$

AB peut même exister sans que BA existe.

4. Carré d'une somme

Toujours :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si $AB = BA$ seulement :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Donc $(AB)^2 = ABAB$, pas A^2B^2 en général.

5. Identité, puissances, binôme

Pour $A \in \mathcal{M}_n$:

$$I_n A = A I_n = A, \quad A^0 = I_n, \quad A^p A^q = A^{p+q}.$$

Si $AB = BA$:

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Si $N^2 = 0$: $(I+N)^m = I + mN$.

6. Matrices particulières

Diagonale : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Triangulaire sup. : $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Symétrique : ${}^t A = A$.

Scalaire : $A = \lambda I_n$.

Diagonale $D = \text{diag}(d_i)$ inversible $\iff d_i \neq 0$ pour tout i .

7. Transposée

$$({}^t A)_{ij} = a_{ji}, \quad {}^t({}^t A) = A.$$

$${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B,$$

$${}^t(AB) = {}^t B {}^t A.$$

L'ordre s'inverse.

8. Inversibilité

$A \in \mathcal{M}_n$ est inversible si

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

$$A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n$$

$$\iff AX = 0 \text{ n'a que } X = 0.$$

Alors $AX = B$ a une unique solution pour tout B .

9. Formules d'inverse

Si A, B inversibles :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

L'ordre est renversé dans l'inverse d'un produit.

Pivot, rang et méthodes

10. Inverse par Gauss-Jordan

Former

$$[A \mid I_n].$$

Réduire le bloc gauche :

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}].$$

Si I_n est impossible à obtenir, A n'est pas inversible.

11. Matrices élémentaires

Une matrice élémentaire E est obtenue à partir de I_n par une opération de ligne.

EA = même opération de ligne appliquée à A .

Toute matrice élémentaire est inversible ; son inverse réalise l'opération inverse.

12. Rang

$$\text{rg}(A) = \text{nombre de pivots après échelonnement.}$$

Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}$:

$$0 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le rang.

13. Propriétés du rang

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$$

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$$

Si P, Q inversibles :

$$\text{rg}(PAQ) = \text{rg}(A).$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, $\text{rg}(A) = n \iff A$ inversible.

14. Simplification matricielle

Si A est inversible :

$$AB = AC \implies B = C$$

(en multipliant à gauche par A^{-1}).

Sans inversibilité, c'est faux. De même,

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

15. Résoudre $AX = B$

Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible :

$$X = A^{-1}B.$$

Ne jamais écrire BA^{-1} : on multiplie du côté où se trouve A .

16. Forme normale du rang

Si $\text{rg}(A) = r$, il existe P, Q inversibles tels que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang compte le nombre de directions indépendantes portées par la matrice.

17. Exemple express : produit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $AB \neq BA$.

18. Exemple express : inverse

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

Gauss-Jordan donne

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Toujours vérifier $AA^{-1} = I_2$.

19. Pièges classiques

- $(AB)^2 = A^2B^2$ sans commutation ;
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$;
- ${}^t(AB) = {}^tA {}^tB$;
- simplifier $AB = AC$ sans A inversible ;
- chercher l'inverse d'une matrice non carrée ;
- croire qu'une ligne nulle diminue la cohérence : elle diminue seulement le rang.

20. Checklist examen

1. Dimensions compatibles ?
2. Ordre des facteurs respecté ?
3. Commutation réellement démontrée ?
4. Matrice carrée avant de parler d'inverse ?
5. Pour simplifier : facteur inversible ?
6. Pour le rang : échelonner et compter les pivots.

Espaces vectoriels

Licence 1 - Fiche de révision

1. Espace vectoriel

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : addition interne, multiplication par un scalaire, axiomes usuels.

Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, fonctions, suites.

2. Critère de sous-espace

$F \subset E$ est un sous-espace si

$$0_E \in F$$

et

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda x + \mu y \in F.$$

Test express : si $0_E \notin F$, arrêter : F n'est pas un sous-espace.

3. Combinaisons linéaires

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i ; \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est le plus petit sous-espace contenant les u_i .

$x \in \text{Vect}(u_i) \iff$ on peut résoudre

$$x = \sum \lambda_i u_i.$$

4. Famille libre

$(u_1, \dots, u_p)$ est libre si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Sinon elle est liée.

Liée $\iff$ un vecteur est combinaison des autres.

5. Famille génératrice et base

Génératrice de E :

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Base = libre + génératrice.

Dans une base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

avec des coordonnées x_i **uniques**.

6. Dimension

Toutes les bases d'un espace de dimension finie ont le même cardinal.

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \quad \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1, \quad \dim \mathcal{M}_{n,p} = np.$$

Si $F \subset E$:

$$\dim F \leq \dim E.$$

Et $F \subset E$, $\dim F = \dim E \implies F = E$.

7. Cardinal d'une famille dans $\dim E = n$

Famille libre $\implies$ au plus n vecteurs.

Famille génératrice $\implies$ au moins n vecteurs.

Avec exactement n vecteurs :

$$\text{libre} \iff \text{génératrice} \iff \text{base}.$$

8. Base incomplète

Toute famille libre d'un espace de dimension finie peut être complétée en une base.

Réciproquement, d'une famille génératrice finie, on peut extraire une base.

Sommes, sommes directes et méthodes

9. Intersection et somme

$F \cap G$ est toujours un sous-espace.

$$F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}.$$

Si $F = \text{Vect}(u_i)$ et $G = \text{Vect}(v_j)$:

$$F + G = \text{Vect}(u_i, v_j).$$

10. Formule de Grassmann

En dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Mémo : l'intersection a été comptée deux fois, donc on la soustrait une fois.

11. Somme directe

$$F + G \text{ directe} \iff F \cap G = \{0\}.$$

Notation : $F \oplus G$.

Alors chaque $x \in F + G$ s'écrit **de façon unique**

$$x = f + g.$$

Et

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

12. Sous-espaces supplémentaires

F et G sont supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G.$$

Méthode pratique en dimension finie :

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E.$$

13. Trouver une base d'un sous-espace

Si F est défini par équations :

1. paramétrer les solutions ;
2. écrire $x \in F$ comme combinaison de vecteurs fixes ;
3. vérifier que ces vecteurs sont libres ;
4. conclure : ils forment une base.

14. Tester une famille

Liberté : résoudre

$$\sum \lambda_i u_i = 0.$$

Unique solution nulle $\Rightarrow$ libre.

Génération : pour x arbitraire, résoudre

$$x = \sum \lambda_i u_i.$$

Possible pour tout $x \Rightarrow$ génératrice.

15. Pièges à éviter

- $F \cup G$ n'est en général pas un sous-espace.
- Une famille contenant 0 est liée.
- Libre $\neq$ génératrice.
- $F + G$ n'est pas forcément directe.
- $x + y = 1$ définit un affine, pas un sous-espace vectoriel.

16. Exemple express dans $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

Avec $x = s, y = t, z = -s - t$:

$$F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).$$

Les deux générateurs sont non colinéaires :

$$\dim F = 2.$$

17. Réflexes d'examen

- Commencer par la nature de l'objet : sous-espace ? famille ? somme ?
- Utiliser les dimensions dès qu'elles sont connues.
- Dans un espace de dimension n , compter les vecteurs avant de calculer.
- Pour une somme directe, chercher d'abord $F \cap G$.

Applications linéaires

Licence 1 - Fiche de révision

1. Linéarité

$f : E \rightarrow F$ est linéaire si

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Conséquences :

$$f(0) = 0, \quad f(-x) = -f(x).$$

Test express : si $f(0) \neq 0$, f n'est pas linéaire.

2. Noyau et image

$$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

$\text{Ker } f$ est un sous-espace de E ; $\text{Im } f$ est un sous-espace de F .

3. Injective / surjective

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

Bijective = injective + surjective.

4. Théorème du rang

Si $\dim E < \infty$:

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg}(f)$$

avec

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Si $\dim E = \dim F$:

$$\text{injective} \iff \text{surjective} \iff \text{bijjective}.$$

5. Image d'une base

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Injective $\iff (f(e_i))$ libre.

Surjective $\iff (f(e_i))$ génératrice de F .

6. Méthode noyau / image

Noyau : résoudre $f(x) = 0$.

Image : écrire

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum x_j v_j$$

puis extraire une base de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

7. Dimensions impossibles

Si $\dim E > \dim F$: pas d'injectivité.

Si $\dim E < \dim F$: pas de surjectivité.

8. Endomorphisme, isomorphisme

Endomorphisme : $f : E \rightarrow E$ linéaire.

Isomorphisme : linéaire bijective.

Automorphisme : endomorphisme bijectif.

Si f est un isomorphisme, f^{-1} est linéaire.

Matrices, rang et changement de base

9. Matrice d'une application

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ dans E , $\mathcal{C}$ dans F .

La colonne j de

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$$

est $[f(e_j)]_{\mathcal{C}}$.

Si $X = [x]_{\mathcal{B}}$:

$$[f(x)]_{\mathcal{C}} = AX.$$

10. Composition

Pour $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$:

$$\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f).$$

Attention à l'ordre : la matrice de l'application effectuée en premier est à droite.

11. Rang matriciel

Si A représente f :

$$\text{rg } A = \text{rg } f.$$

$\text{rg } A$ = nombre de pivots = dimension de l'espace des colonnes.

Si $A \in M_{n,p}$:

$$f \text{ injective} \iff \text{rg } A = p,$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg } A = n.$$

12. Changement de base général

Si

$$[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}, \quad [y]_{\mathcal{C}} = Q[y]_{\mathcal{C}'},$$

alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Toujours définir la convention de P et Q avant d'appliquer la formule.

13. Endomorphisme : similitude

Pour un endomorphisme, même changement de base au départ et à l'arrivée :

$$A' = P^{-1}AP.$$

A et A' sont **semblables** : même endomorphisme, bases différentes.

14. Projecteur

$$p^2 = p.$$

Alors

$$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p.$$

$p = \text{Id}$ sur $\text{Im } p$ et $p = 0$ sur $\text{Ker } p$.

15. Symétrie

$$s^2 = \text{Id}.$$

Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}).$$

Valeurs : $+1$ sur l'espace fixe, -1 sur l'espace renversé.

16. Isomorphisme et matrice

Si $\dim E = \dim F = n$:

$$f \text{ isomorphisme} \iff A \text{ inversible} \iff \text{rg } A = n.$$

Et

$$\text{Mat}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

17. Pièges à éviter

- $\text{Ker } f \subset E$, mais $\text{Im } f \subset F$.
- Le rang est $\dim(\text{Im } f)$.
- Une matrice dépend des bases choisies.
- $A' = P^{-1}AP$ seulement avec la bonne convention de passage.
- $\text{Mat}(g \circ f) = GF$, pas FG .

18. Checklist exercice

1. Identifier espaces et dimensions.
2. Tester la linéarité si nécessaire.
3. Calculer noyau / image.
4. Utiliser le théorème du rang.
5. Construire la matrice colonne par colonne.
6. Pour un changement de base, écrire d'abord la relation sur les coordonnées.

Déterminants

Licence 1 - Fiche de révision

1. Ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible $\iff ad - bc \neq 0$.

2. Ordre 3 - Sarrus

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$,

$$\det A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Uniquement pour les matrices 3×3 .

3. Cofacteurs / Laplace

Mineur M_{ij} : supprimer ligne i , colonne j .

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Développement suivant la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Idem suivant une colonne.

4. Opérations sur les lignes

- $L_i \leftrightarrow L_j$: det change de signe.
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$: det est multiplié par λ .
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$: det inchangé.

Même règles sur les colonnes.

5. Triangulaire

Si A est triangulaire :

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Très utile après échelonnement.

6. Produit et transposée

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(A^T) = \det A, \quad \det I_n = 1.$$

Si A inversible :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

7. Deux pièges majeurs

En général,

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Inversibilité, Cramer et géométrie

8. Critère d'inversibilité Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0.$$

Équivalent à

$$\operatorname{rg}(A) = n.$$

9. Famille de n vecteurs Pour $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$:

$$\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$$

$\iff$ famille libre $\iff$ base de $\mathbb{K}^n$.

10. Cramer Pour $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\det A \neq 0$:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

où A_j remplace la colonne j par B .

À utiliser seulement pour un système carré inversible.

11. Similitude Si

$$A' = P^{-1}AP,$$

alors

$$\det A' = \det A.$$

Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend donc pas de la base.

12. Géométrie Dans $\mathbb{R}^2$:

$$|\det(u, v)| = \text{aire du parallélogramme.}$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$|\det(u, v, w)| = \text{volume du parallélépipède.}$$

Le signe indique l'orientation.

13. Méthode de calcul

- 2×2 : formule directe.
- 3×3 : Sarrus ou Laplace.
- Beaucoup de zéros : Laplace.
- Triangulaire : produit diagonal.
- Grande matrice : Gauss + suivi des opérations.

14. Adjugée Si $C = (C_{ij})$ est la matrice des cofacteurs :

$$\operatorname{adj}(A) = C^T.$$

$$A \operatorname{adj}(A) = (\det A) I_n.$$

Si $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A).$$

15. Checklist anti-erreur

- Sarrus seulement en ordre 3.
- Échange de lignes $\Rightarrow$ signe opposé.
- Factoriser une ligne $\Rightarrow$ facteur sort une fois.
- Deux lignes proportionnelles $\Rightarrow \det = 0$.
- $\det A = 0 \Rightarrow$ pas d'inverse, pas de Cramer.

16. Réflexes à connaître

$$\det I_n = 1, \quad \det(A^k) = (\det A)^k.$$

Si $A^m = I_n$:

$$(\det A)^m = 1.$$

Sur $\mathbb{R}$, si m est impair, alors $\det A = 1$.

Fiche de révision – Géométrie L1

Droites, plans, produits scalaire/vectorielle, distances et intersections

1. Vecteurs et coordonnées

Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Dans $\mathbb{R}^2$: $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ sont colinéaires ssi

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^3$: colinéarité ssi coordonnées proportionnelles, ou $u \times v = 0$.

2. Droite du plan $\mathbb{R}^2$

Par $A(x_0, y_0)$, direction $u = (\alpha, \beta) \neq 0$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0, \quad n = (a, b) \text{ normal.}$$

Un directeur est $u = (-b, a)$.

Paramétrique $\rightarrow$ cartésienne : avec $u = (\alpha, \beta)$,

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

3. Droite et plan dans $\mathbb{R}^3$

Droite par A , direction $u = (\alpha, \beta, \gamma)$:

$$M = A + tu.$$

Soit, coordonnée par coordonnée,

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

Plan par A , directions u, v non colinéaires :

$$M = A + su + tv.$$

Plan cartésien :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad n = (a, b, c) \text{ normal.}$$

Pour passer de (A, u, v) à une équation cartésienne :

$$n = u \times v, \quad n \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

4. Positions relatives

Droite $D : A + tu$ et plan Π de normal n :

- $u \cdot n \neq 0$: un point d'intersection unique ;
- $u \cdot n = 0$ et $A \in \Pi$: $D \subset \Pi$;
- $u \cdot n = 0$ et $A \notin \Pi$: $D \parallel \Pi$.

Deux plans : parallèles ssi leurs normaux sont colinéaires. Sinon, leur intersection est une droite de direction

$$n_1 \times n_2.$$

5. Produit scalaire, norme, angle

$$u \cdot v = \sum u_i v_i, \quad \|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Orthogonalité :

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0.$$

Angle $\theta \in [0, \pi]$:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Pour l'angle aigu entre deux droites, prendre la valeur absolue au numérateur.

Cauchy-Schwarz :

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

6. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Pour $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

- $u \times v \perp u$ et $u \times v \perp v$;
- $u \times v = 0 \iff u, v$ colinéaires ;
- $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$;
- aire parallélogramme = $\|u \times v\|$;
- aire triangle = $\frac{1}{2} \|u \times v\|$.

7. Produit mixte et volume

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \det(u, v, w).$$

$$u, v, w \text{ coplanaires} \iff [u, v, w] = 0.$$

Volume du parallélépipède :

$$V = |[u, v, w]|.$$

8. Projections et distances

Projection de v sur $\text{Vect}(u)$, $u \neq 0$:

$$\text{proj}_u(v) = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u.$$

Distance point-point :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Point $M_0(x_0, y_0)$ à $D : ax + by + c = 0$:

$$d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à $\Pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Point M à une droite $D = A + \mathbb{R}u$ de $\mathbb{R}^3$:

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \times u\|}{\|u\|}.$$

9. Procédures rapides

Plan par trois points A, B, C :

$$u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, n = u \times v, \quad n \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

Intersection droite-plan : substituer les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation du plan et résoudre en t .

Deux plans : comparer n_1, n_2 ; s'ils ne sont pas colinéaires, résoudre le système ou chercher une direction $n_1 \times n_2$.

Angle entre plans : angle entre leurs normaux.

Pièges à éviter

- Le produit vectoriel du cours est défini dans $\mathbb{R}^3$, pas comme un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
- Une droite de $\mathbb{R}^3$ n'a pas une unique équation cartésienne : on la décrit paramétriquement ou comme intersection de deux plans.
- Ne pas confondre vecteur directeur et vecteur normal.
- Pour conclure à une intersection, toujours résoudre le système : le dessin ne prouve rien.

Dénombrement et probabilités — L1

Fiche de révision — formules, méthodes et pièges

1. Cardinaux et principes

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad |E \times F| = |E| |F|.$$

Principe multiplicatif : n_1 choix, puis n_2 , etc. $\Rightarrow n_1 \cdots n_p$ possibilités.

Si $|E| = p$, $|F| = n$, nombre d'applications $E \rightarrow F$:

$$n^p.$$

2. Quel dénombrement ?

Situation	Nombre
p choix ordonnés, répétition	n^p
p choix ordonnés, sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
p choix non ordonnés	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Permutation	$n!$

Question réflexe : deux résultats qui ne diffèrent que par l'ordre sont-ils identiques ?

3. Combinaisons

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

4. Probabilités finies

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A),$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Sous **équiprobabilité** :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ne jamais utiliser cette formule sans justifier l'équiprobabilité.

5. Conditionnement

Si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A | B).$$

Chaîne :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(C | A \cap B).$$

6. Probabilités totales et Bayes

Si (B_i) est un système complet :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i).$$

Bayes :

$$\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(A | B_j)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remplacer $\mathbb{P}(A)$ par la formule des probabilités totales si nécessaire.

7. Indépendance

$$A \perp B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Si $\mathbb{P}(B) > 0$: $A \perp B \iff \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Attention : indépendance $\neq$ incompatibilité.

8. Variable aléatoire finie

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_r$ avec probabilités p_i :

$$\sum_i p_i = 1, \quad \mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i.$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

9. Bernoulli et binomiale

$X \sim \mathcal{B}(1, p)$:

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \text{Var}(X) = p(1-p).$$

Pour n épreuves **indépendantes**, même probabilité de succès p :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p),$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p).$$

10. Méthode express

1. Décrire précisément les issues.
2. Décider : ordre ? répétition ?
3. Choisir n^p , A_n^p , $\binom{n}{p}$ ou $n!$.
4. En probabilité : vérifier l'équiprobabilité.
5. Informations successives $\Rightarrow$ conditionnement.
6. Plusieurs causes $\Rightarrow$ probabilités totales.
7. Effet observé $\rightarrow$ cause $\Rightarrow$ Bayes.
8. Variable aléatoire $\Rightarrow$ écrire sa loi avant $\mathbb{E}$ et Var .

11. Pièges à éviter

- Arrangement alors que l'ordre ne compte pas.
- “favorables / possibles” sans équiprobabilité.
- Confondre $\mathbb{P}(A | B)$ et $\mathbb{P}(B | A)$.
- Confondre indépendance et incompatibilité.
- Loi binomiale sans indépendance ni probabilité constante.
- Oublier que $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

12. Mini-exemples

Équipe de 3 parmi 10 : $\binom{10}{3} = 120$.

Trois rôles distincts parmi 10 : $A_{10}^3 = 720$.

Deux rouges sans remise, urne 4R/6B :

$$\mathbb{P}(RR) = \frac{4}{10} \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

Bayes : toujours écrire d'abord le dénominateur avec les probabilités totales.

Dénombrement et probabilités — L1

Fiche de révision — réflexes de résolution

A. Décider si l'ordre compte

Comparer deux résultats qui ne diffèrent que par une permutation.

— Même résultat $\Rightarrow$ combinaison.

— Résultat différent $\Rightarrow$ liste ou arrangement.

Exemple : un comité $\{A, B, C\}$ est le même que $\{C, A, B\}$; un podium (A, B, C) n'est pas le même que (C, A, B) .

B. Complémentaire

Pour compter ou calculer une probabilité, “au moins un” est souvent plus simple par le complémentaire :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c).$$

Exemple : avec n essais indépendants de succès p ,

$$\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - (1 - p)^n.$$

C. Tirages : avec ou sans remise

Avec remise : la composition ne change pas ; les tirages peuvent être indépendants.

Sans remise : la composition change ; les probabilités conditionnelles changent d'un tirage au suivant.

D. Arbre pondéré : règles

Sur un arbre de probabilités :

— somme des probabilités sortant d'un même nœud = 1 ;

— probabilité d'un chemin = produit des probabilités de ses branches ;

— événement réalisé par plusieurs chemins disjoints = somme des probabilités des chemins.

E. Bayes : schéma mental

Si C est une cause et T un résultat observé :

$$\mathbb{P}(C | T) = \frac{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(T | C)}{\mathbb{P}(T)}.$$

Le dénominateur est la probabilité totale du résultat observé. Bayes **inverse le conditionnement**, il ne permet pas d'échanger directement C et T .

F. Loi d'une variable aléatoire

Tableau-type :

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ \hline \mathbb{P}(X = x) & p_1 & p_2 & \cdots & p_r \end{array}$$

Toujours vérifier $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$ avant de calculer l'espérance.

G. Calcul rapide de la variance

Souvent plus efficace :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

La variance est toujours ≥ 0 et possède l'unité au carré ; l'écart-type retrouve l'unité de X .

H. Formule binomiale : reconnaître le cadre

Il faut simultanément :

1. un nombre fixé n d'épreuves ;
2. deux issues : succès/échec ;
3. mêmes probabilités p et $1 - p$;
4. indépendance des épreuves ;
5. X = nombre de succès.

Alors seulement $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

I. Contrôles de cohérence

Avant de rendre :

- une probabilité doit être dans $[0, 1]$;
- les probabilités d'une loi doivent sommer à 1 ;
- $\binom{n}{p} \leq 2^n$;
- $\text{Var}(X) \geq 0$;
- dans A_n^p , il faut $p \leq n$;
- dans un problème d'équiprobabilité, numérateur $\leq$ dénominateur.

J. Formules à savoir par cœur

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}, \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i),$$

$$\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(A | B_j)}{\mathbb{P}(A)},$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i, \quad \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

K. Exemple complet éclair

Une urne contient 3 rouges et 2 bleues. On tire 2 boules sans remise. Probabilité d'avoir une de chaque couleur :

$$\frac{3}{5} \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{5}.$$

En dénombrement équiprobable :

$$\frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Deux méthodes correctes, même résultat.

L. Réflexe final

D'abord compter, ensuite probabiliser. Une formule de dénombrement choisie sur le mauvais modèle produit un résultat faux même si le calcul algébrique est parfait.

Python et calcul scientifique — L1

Fiche de révision — syntaxe, méthodes numériques et pièges

1. Python essentiel

Types : `int`, `float`, `bool`, `str`, `list`.
 Affectation : `x = 3`. Test : `x == 3`.
`range(a,b)` parcourt $a, \dots, b-1$.

```
def f(x):
    return x**2 - 2
for k in range(5):
    print(k, f(k))
```

2. Listes, boucles, fonctions

```
L = [1, 4, 9]
L.append(16)
carres = [k**2 for k in range(10)]
```

for : nombre d'itérations connu.
while : arrêt défini par une condition.
 Une récursion doit avoir un **cas d'arrêt**.

3. Complexité

Ordres usuels :

$$\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(\log n), \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n \log n), \mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(2^n).$$

Dichotomie : $\mathcal{O}(\log n)$. Parcours : $\mathcal{O}(n)$. Double boucle : $\mathcal{O}(n^2)$.

4. Flottants

Ne pas tester en général `a == b`. Utiliser

$$|a - b| \leq \varepsilon.$$

NumPy : `np.isclose(a,b)`, `np.allclose(A,B)`.

```
abs(a - b) <= 1e-12
```

5. NumPy

```
import numpy as np
x = np.linspace(0, 1, 101)
y = np.exp(-x**2)
```

`A * B` : produit terme à terme.

`A @ B` : produit matriciel.

Vectoriser plutôt que boucler quand l'opération est composante par composante.

6. Matplotlib

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, y, label="f")
plt.xlabel("x"); plt.ylabel("y")
plt.grid(True); plt.legend(); plt.show()
```

Nuage de points : `plt.scatter(x,y)`.

7. Dichotomie

Hypothèses : f continue sur $[a, b]$, $f(a)f(b) \leq 0$.

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad \ell_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Erreur sur le milieu :

$$|m_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Nombre d'étapes pour largeur $\leq \varepsilon$:

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right).$$

8. Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Très rapide près d'une racine simple, mais pas garanti globalement. Vérifier $f'(x_n) \neq 0$ et imposer **nmax**.

```
xn = x - f(x)/df(x)
```

Python et calcul scientifique — L1

Fiche de révision — calcul numérique et réflexes

9. Rectangles et trapèzes

$$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh.$$

$$R_n = h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

$$T_n = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right).$$

Comparer l'approximation lorsque n augmente.

10. Euler explicite

Pour

$$y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

avec pas h :

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n).$$

Un pas plus petit améliore souvent la précision mais augmente le coût.

11. Simulation aléatoire

```
rng = np.random.default_rng(123)
x = rng.integers(1, 7, size=100000)
freq = np.mean(x == 6)
```

La simulation **illustre** une loi ; elle ne la démontre pas. Fixer une graine rend l'expérience reproductible.

12. Critères d'arrêt

Toujours combiner si possible :

- une tolérance ε ;
- un nombre maximal d'itérations ;
- un contrôle des cas interdits.

Exemples : $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$, $b - a \leq \varepsilon$.

13. Méthode type d'un exercice

1. Traduire précisément le problème mathématique.
2. Identifier entrées, sorties et préconditions.
3. Écrire l'algorithme avant le code.
4. Programmer en fonctions courtes.
5. Tester sur un cas connu.
6. Étudier précision et coût.
7. Tracer seulement si cela aide à interpréter.

14. Tableau des méthodes

But	Méthode
Racine robuste	Dichotomie
Racine rapide	Newton
Intégrale	Rectangles / trapèzes
EDO	Euler explicite
Courbe	Matplotlib
Calcul tableau	NumPy

15. Pièges à éviter

- `==` pour deux flottants.
- Oublier que `range(n)` finit à $n - 1$.
- Confondre `*` et `@` sous NumPy.
- Boucle `while` sans garantie d'arrêt.
- Newton avec f' nul ou point initial mal choisi.
- Conclure à partir d'un seul graphique ou d'une simulation.
- Pas d'Euler trop grand sans contrôle d'erreur.

16. Mini-syntaxe à connaître

```
# somme des carres
s = sum(k**2 for k in range(n))

# tableau regulier
x = np.linspace(a, b, N)

# test numerique
a_proche = np.isclose(a, b)
```