MathLvl

Fiches de révision de maths

Première générale

8 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Automatismes p. 2
2. Pourcentages et taux d'évolution p. 5
3. Suites numériques (introduction) p. 8
4. Fonction exponentielle p. 11
5. Fonctions polynômes du second degré p. 14
6. Dérivation p. 16
7. Statistiques à deux variables p. 19
8. Probabilités conditionnelles p. 22

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Fiche de révision - Automatismes

Première générale - Mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique

1. Pourcentages et évolutions

Formules à savoir refaire sans hésiter

Pourcentage	$t\% = \frac{t}{100}$; $t\%$ de V : $\frac{t}{100} \times V$.
Valeur finale	$V_f = V_i \times CM$.
Hausse de $t\%$	$CM = 1 + \frac{t}{100}$; exemple : $+8\% \Rightarrow 1{,}08$.
Baisse de $t\%$	$CM = 1 - \frac{t}{100}$; exemple : $-8\% \Rightarrow 0{,}92$.
Taux	$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$, puis convertir en pourcentage.
Successives	$CM_{global} = CM_1 \times CM_2 \times \cdots$; $t_{global} = CM_{global} - 1$.
Réciproque	$CM_{rec} = \frac{1}{CM}$; $t_{rec} = CM_{rec} - 1$.

Exemples flash

- 12% de 50 : $0{,}12 \times 50 = 6$.
- De 80 à 100 : $t = \frac{20}{80} = 25\%$.
- $+20\%$ puis -20% : $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$, donc -4%.
- Après une hausse de 25%, revenir au départ : $1/1{,}25 = 0{,}8$, donc -20%.

2. Calcul littéral

Réduire - développer - factoriser

Réduire	Regrouper les termes de même nature : $5x + 2 - 3x + 7 = 2x + 9$.
Développer	Distribuer : $3(x - 4) = 3x - 12$; $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$.
Factoriser	Chercher un facteur commun : $6x + 9 = 3(2x + 3)$; $x^2 + 4x = x(x + 4)$.

Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Attention aux signes

- $-3^2 = -9$ mais $(-3)^2 = 9$.
- $-(x - 4) = -x + 4$.
- $-2(x + 5) = -2x - 10$.
- $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Équations simples, inéquations et signe

Méthodes

Premier degré	$ax+b=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$, avec $a \neq 0$.
Produit nul	$A \times B = 0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$.
Inéquation	On isole x ; si on divise par un nombre négatif, on change le sens.
Signe de $ax+b$	Racine : $x=-\dfrac{b}{a}$. Si $a>0$: négatif avant, positif après. Si $a<0$: inverse.

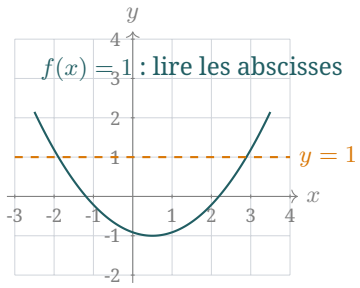
Exemples

- $2x-10=0 \Rightarrow x=5$.
- $(x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x=4$ ou $x=-1$.
- $3x+1<10 \Rightarrow x<3$.
- $-2x \geq 6 \Rightarrow x \leq -3$.

4. Lecture graphique

Images, antécédents, signe, variations

- Lire $f(a)$: partir de a, monter à la courbe, lire l'ordonnée.
- Résoudre $f(x)=k$: intersections avec la droite $y=k$, puis lire les abscisses.
- $f(x)>0$: courbe au-dessus de l'axe des abscisses.
- $f(x)<0$: courbe au-dessous de l'axe des abscisses.
- Croissante : la courbe monte de gauche à droite.
- Décroissante : la courbe descend de gauche à droite.



5. Droites et statistiques

Droites

Une droite non verticale s'écrit $y=mx+p$. m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

Exemple : $A(1;2)$ et $B(4;8)$ donnent $m=\dfrac{8-2}{4-1}=2$.

Statistiques

Lire le titre, les unités et les échelles. Moyenne : $\overline{x}=\dfrac{\text{somme}}{\text{effectif}}$. Médiane : valeur centrale d'une série ordonnée. Étendue : maximum − minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Entraînement express

Questions flash

1. 20% de 140.
2. Écrire $0{,}35$ en pourcentage.
3. Coefficient d'une hausse de 4%.
4. Coefficient d'une baisse de 17%.
5. De 60 à 75 : taux d'évolution.
6. Réduire $9x + 3 - 4x + 8$.
7. Développer $2(x + 7)$.
8. Factoriser $5x - 20$.
9. Résoudre $3x - 9 = 0$.
10. Résoudre $(x + 2)(x - 5) = 0$.
11. Résoudre $4x + 1 < 13$.
12. Donner m pour $A(0;1)$ et $B(2;7)$.

Corrigé

1. 28.
2. 35%.
3. $1{,}04$.
4. $0{,}83$.
5. $\dfrac{75 - 60}{60} = 25$%.
6. $5x + 11$.
7. $2x + 14$.
8. $5(x - 4)$.
9. $x = 3$.
10. $x = -2$ ou $x = 5$.
11. $x < 3$.
12. $m = \dfrac{7 - 1}{2 - 0} = 3$.

7. Check-list anti-erreurs

Avant de valider

— Une baisse de 20% correspond à $CM = 0{,}80$.
— Les évolutions successives se multiplient, elles ne s'additionnent pas.
— Diviser une inégalité par un nombre négatif inverse le sens.
— Le signe d'une fonction dépend de l'axe des abscisses.
— Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses.
— Dans $y = mx + p$, p se lit sur l'axe des ordonnées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Pourcentages et taux d'évolution

Première générale - mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique

1. Conversions essentielles

Écriture	Signification	Décimal
$p\,\%$	p pour 100	$\dfrac{p}{100}$
$12\,\%$	12 pour 100	0,12
$0{,}5\,\%$	un demi pour cent	0,005
$135\,\%$	135 pour 100	1,35

2. Taux d'évolution

Une grandeur passe de la valeur initiale V_i à la valeur finale V_f.

$$\boxed{t = \frac{V_f - V_i}{V_i}}$$

— $t > 0$: hausse.

— $t < 0$: baisse.

— Pour écrire t en pourcentage, on multiplie par 100.

Exemple

Un prix passe de 50 euros à 62 euros.

$$t = \frac{62 - 50}{50} = \frac{12}{50} = 0{,}24.$$

Le prix a augmenté de $24\,\%$.

3. Coefficient multiplicateur

$$\boxed{\text{CM} = 1 + t} \qquad \boxed{t = \text{CM} - 1} \qquad \boxed{V_f = V_i \times \text{CM}} \qquad \boxed{V_i = \frac{V_f}{\text{CM}}}$$

Évolution	Coefficient	Interprétation
Hausse de $p\,\%$	$1 + \dfrac{p}{100}$	supérieur à 1
Baisse de $p\,\%$	$1 - \dfrac{p}{100}$	inférieur à 1
Hausse de $8\,\%$	1,08	multiplier par 1,08
Baisse de $30\,\%$	0,70	garder $70\,\%$

Méthode rapide

— Valeur finale : transformer le pourcentage en coefficient puis multiplier.

— Valeur initiale : transformer le pourcentage en coefficient puis diviser.

— Taux entre deux valeurs : utiliser $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Évolutions successives et réciproques

4. Évolutions successives

Pour plusieurs évolutions successives, on multiplie les coefficients multiplicateurs :

$$\boxed{\mathrm{CM}_{\text{global}} = \mathrm{CM}_1 \times \mathrm{CM}_2 \times \cdots \times \mathrm{CM}_n}$$

Puis on revient au taux :

$$\boxed{t_{\text{global}} = \mathrm{CM}_{\text{global}} - 1}$$

Exemple

Une quantité augmente de 10 % puis diminue de 15 %.

$$\mathrm{CM}_{\text{global}} = 1{,}10 \times 0{,}85 = 0{,}935.$$

$$t_{\text{global}} = 0{,}935 - 1 = -0{,}065.$$

La quantité diminue donc de 6,5 % au total.

5. Évolution réciproque

L'évolution réciproque permet de revenir à la valeur initiale.

$$\boxed{\mathrm{CM}_{\text{réciproque}} = \frac{1}{\mathrm{CM}}}$$

$$\boxed{t_{\text{réciproque}} = \frac{1}{\mathrm{CM}} - 1}$$

Exemple

Une hausse de 25 % correspond à CM = 1,25.

$$\mathrm{CM}_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

Il faut donc une baisse de 20 % pour revenir au départ.

Pièges à éviter

— On ne calcule pas un taux d'évolution en divisant par la valeur finale.
— On n'additionne pas les taux successifs : on multiplie les coefficients.
— Une hausse de 20 % puis une baisse de 20 % ne ramène pas au départ.
— Une augmentation de 3 points de pourcentage n'est pas forcément une hausse de 3 %.

Table de décision

Situation	À faire
« **augmente de** p % »	multiplier par $1 + \frac{p}{100}$
« **diminue de** p % »	multiplier par $1 - \frac{p}{100}$
« **passe de** V_i **à** V_f »	calculer $\frac{V_f - V_i}{V_i}$
« **plusieurs évolutions** »	multiplier les coefficients
« **revenir au départ** »	prendre l'inverse du coefficient

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Mini-entrainement corrigé

Exercice 1

Un article de 80 euros augmente de 15 %. Prix final ?

$$\text{CM} = 1{,}15, \qquad V_f = 80 \times 1{,}15 = 92.$$

Le prix final est 92 euros.

Exercice 2

Un nombre passe de 240 à 198. Taux d'évolution ?

$$t = \frac{198 - 240}{240} = \frac{-42}{240} = -0{,}175.$$

Le nombre a diminué de 17,5 %.

Exercice 3

Après une baisse de 12 %, un prix vaut 176 euros. Prix initial ?

$$\text{CM} = 0{,}88, \qquad V_i = \frac{176}{0{,}88} = 200.$$

Le prix initial était 200 euros.

Exercice 4

Une valeur augmente de 8 %, puis diminue de 5 %. Taux global ?

$$\text{CM}_{\text{global}} = 1{,}08 \times 0{,}95 = 1{,}026.$$

$$t_{\text{global}} = 1{,}026 - 1 = 0{,}026.$$

La valeur augmente de 2,6 % au total.

Exercice 5

Trouver le taux réciproque d'une baisse de 30 %.

$$\text{CM} = 0{,}70, \qquad \text{CM}_{\text{réciproque}} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}4286.$$

$$t_{\text{réciproque}} \approx 1{,}4286 - 1 = 0{,}4286.$$

Il faut donc une hausse d'environ 42,9 %.

À retenir en une phrase

Un pourcentage d'évolution se traite presque toujours avec un coefficient multiplicateur : on transforme, on multiplie, puis on interprète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Suites numériques - fiche de révision

Définition, variation et représentations graphiques

Niveau : Première générale, mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique, tronc commun.

1. Définition d'une suite

Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres :

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \dots$$

Le nombre u_n s'appelle le **terme de rang** n. Le rang n est un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$.
Deux notations possibles :

$$u(n) \quad \text{ou} \quad u_n.$$

En introduction, la notation $u(n)$ aide à voir une suite comme une fonction définie seulement pour des entiers.

Suite définie explicitement

On donne directement u_n en fonction de n.

$$u_n = 3n + 2$$

Alors :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 8.$$

Méthode : remplacer n par le rang demandé.

Suite définie par récurrence

On donne le premier terme et une règle pour passer d'un terme au suivant.

$$u_0 = 4, \qquad u_{n+1} = u_n + 5.$$

Alors :

$$u_1 = 9, \quad u_2 = 14, \quad u_3 = 19.$$

Méthode : calculer les termes dans l'ordre.

À ne pas confondre

Une suite n'est pas une courbe continue : elle n'existe qu'aux rangs entiers $0, 1, 2, 3, \dots$ En représentation graphique, on place donc des **points isolés** de coordonnées $(n ; u_n)$.

2. Sens de variation d'une suite

Pour étudier la variation d'une suite, on compare deux termes consécutifs.

$$u_{n+1} - u_n$$

Cas	Condition	Conclusion
Croissante	$u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n	Les termes augmentent ou restent égaux.
Décroissante	$u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n	Les termes diminuent ou restent égaux.
Constante	$u_{n+1} = u_n$ pour tout n	Tous les termes sont égaux.

Méthode rapide pour une suite quelconque

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
2. Étudier le signe de cette différence.
3. Conclure : signe positif $\Rightarrow$ croissante ; signe négatif $\Rightarrow$ décroissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Suites arithmétiques : modèle linéaire discret

Une suite est **arithmétique** lorsque l'on ajoute toujours le même nombre. Ce nombre s'appelle la **raison** et se note r.

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Si le premier terme est u_0, alors :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, si le premier terme connu est u_1, alors :

$$u_n = u_1 + (n-1)r.$$

Reconnaitre

On vérifie si la différence entre deux termes consécutifs est constante :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Exemple : $7, 10, 13, 16, \ldots$
On ajoute 3, donc $r = 3$.

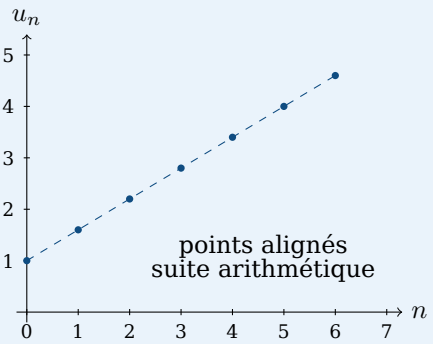
Variation

Pour une suite arithmétique :

$$\begin{cases} r > 0 & \Rightarrow \text{ suite croissante,} \\ r = 0 & \Rightarrow \text{ suite constante,} \\ r < 0 & \Rightarrow \text{ suite décroissante.} \end{cases}$$

Représentation graphique d'une suite arithmétique

Les points $(n; u_n)$ sont alignés, car la formule explicite est de la forme $u_n = u_0 + nr$.



4. Suites géométriques positives : modèle exponentiel discret

Une suite est **géométrique** lorsque l'on multiplie toujours par le même nombre positif. Ce nombre s'appelle la **raison** et se note q.

$$u_{n+1} = q\,u_n \qquad (q > 0)$$

Si le premier terme est u_0, alors :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Si le premier terme connu est u_1, alors :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Reconnaitre

On vérifie si le quotient entre deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad (u_n \neq 0).$$

Exemple : $5, 10, 20, 40, \ldots$
On multiplie par 2, donc $q = 2$.

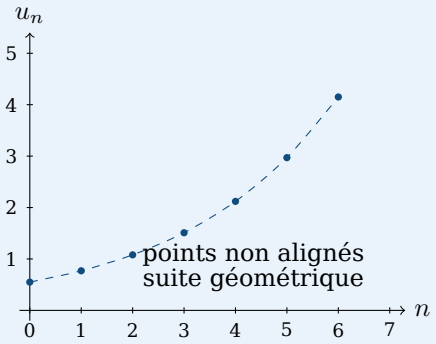
Variation si $u_0 > 0$ et $q > 0$

$$\begin{cases} q > 1 & \Rightarrow \text{ suite croissante,} \\ q = 1 & \Rightarrow \text{ suite constante,} \\ 0 < q < 1 & \Rightarrow \text{ suite décroissante.} \end{cases}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Représentation graphique d'une suite géométrique positive

Les points $(n; u_n)$ ne sont généralement pas alignés. Ils suivent une allure de croissance ou décroissance exponentielle.



5. Tableau bilan à mémoriser

Type de suite	Arithmétique	Géométrique positive
Idée	On ajoute toujours le même nombre.	On multiplie toujours par le même nombre positif.
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$ avec $q > 0$
Formule depuis u_0	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
Test	$u_{n+1} - u_n$ constant	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant
Graphique	Points alignés	Points non alignés en général
Modèle	Croissance linéaire discrète	Croissance ou décroissance exponentielle discrète

6. Savoir résoudre un problème de seuil

Un problème de seuil demande à partir de quel rang n une quantité dépasse ou passe sous une valeur.

1. Identifier le modèle : arithmétique ou géométrique.
2. Écrire la formule de u_n.
3. Tester les valeurs de n avec la calculatrice, un tableur ou un raisonnement.
4. Répondre avec une phrase : « Le seuil est atteint à partir du rang $n = \ldots$ ».

À ne pas confondre

— Ne pas relier les points d'une suite comme si tous les nombres réels existaient entre deux rangs.
— Pour une suite géométrique, une augmentation de 20% correspond à $q = 1,20$, pas à $q = 20$.
— Une baisse de 15% correspond à $q = 0,85$.
— Dans $u_n = u_0 q^n$, l'exposant est le nombre d'évolutions effectuées depuis le rang 0.

7. Mini-entraînement corrigé

1. $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = u_n + 4$. Nature, raison et u_5 ?
   Réponse : arithmétique, $r = 4$, $u_5 = 12 + 5 \times 4 = 32$.
2. $v_0 = 80$ et $v_{n+1} = 0{,}75 v_n$. Nature, raison et variation ?
   Réponse : géométrique positive, $q = 0{,}75$, décroissante car $0 < q < 1$.
3. Une population vaut 5000 habitants et augmente de 3% par an. Modèle ?
   Réponse : $p_n = 5000 \times 1{,}03^n$.
4. Une économie augmente de 150 euros chaque mois à partir de 600 euros. Modèle ?
   Réponse : $e_n = 600 + 150n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fonction exponentielle de base q

Fiche de révision - Première générale

Propriétés, variations et évolutions

1. Idée générale

Une fonction exponentielle modélise une grandeur qui est **multipliée par le même coefficient** sur des durées égales.

Si $q > 0$, la fonction exponentielle de base q est

$$f(x) = q^x \qquad (x \geqslant 0).$$

Exemples rapides

- $1{,}08^x$: hausse de 8% par unité de temps.
- $0{,}75^x$: baisse de 25% par unité de temps.
- $V(x) = V_0 q^x$: modèle exponentiel général.

2. Valeurs et propriétés

Pour tout $q > 0$:

$$q^0 = 1, \qquad q^1 = q, \qquad q^x > 0.$$

La courbe passe par $(0\,;1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Propriétés admises :

$$q^{x+y} = q^x q^y, \qquad q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}, \qquad (q^x)^y = q^{xy}.$$

Cas de l'exposant $1/n$

$$q^{1/n} = \sqrt[n]{q}.$$

C'est le coefficient qui, appliqué n fois, donne q.

Exemple.

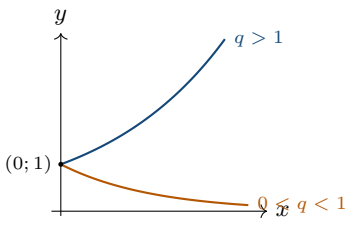
$$1{,}21^{1/2} = 1{,}10$$

car $1{,}10^2 = 1{,}21$.

3. Variations

Pour $f(x) = q^x$:

- si $q > 1$, f est croissante ;
- si $0 < q < 1$, f est décroissante ;
- si $q = 1$, f est constante.



4. Pourcentages et coefficient

Si le taux d'évolution est t, alors le coefficient multiplicateur est

$$q = 1 + t.$$

Taux	Coefficient
+6%	1,06
−6%	0,94
+12,5%	1,125
−40%	0,60

Modèle à connaître

$$V(x) = V_0 q^x.$$

V_0 est la valeur initiale, q est le coefficient par unité de temps.

Exemple. Une quantité de 250 augmente de 3% par an :

$$V(x) = 250 \times 1{,}03^x.$$

5. Taux moyen

Si une grandeur est multipliée par C en n périodes identiques :

$$q_{\text{moy}} = C^{1/n}, \qquad t_{\text{moy}} = q_{\text{moy}} - 1.$$

Exemple. Une grandeur passe de 100 à 160 en 5 ans.

$$C = \frac{160}{100} = 1{,}6, \qquad q_{\text{moy}} = 1{,}6^{1/5} \approx 1{,}099.$$

Le taux moyen est environ 9,9% par an.

6. Seuils

Un problème de seuil demande à partir de quand une valeur dépasse ou passe sous un seuil.

Méthode :

1. écrire $V(x) = V_0 q^x$;
2. poser l'inégalité ;
3. tester des valeurs avec la calculatrice, un tableau ou un graphique ;
4. conclure en contexte.

Exemple. $C(n) = 1000 \times 1{,}05^n$. Pour dépasser 2000 :

$$C(14) \approx 1979{,}9 < 2000, \qquad C(15) \approx 2078{,}9 > 2000.$$

Le seuil est dépassé au bout de 15 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Méthodes express

Question	Réflexe
Trouver le coefficient	Transformer le pourcentage : $q = 1 + t$.
Écrire un modèle	Utiliser $V(x) = V_0 q^x$.
Savoir si la courbe monte	Regarder q : si $q > 1$, croissance ; si $0 < q < 1$, décroissance.
Calculer une valeur	Remplacer x par la durée donnée.
Trouver une valeur initiale	Diviser par q^x : $V_0 = \dfrac{V(x)}{q^x}$.
Trouver un taux moyen	Calculer $q_{\text{moy}} = C^{1/n}$ puis $t = q_{\text{moy}} - 1$.
Résoudre un seuil	Tester des valeurs, lire un graphique ou utiliser un tableur.

Exemples types

Type 1 - Croissance. Une population de 4000 habitants augmente de 2% par an.

$$P(x) = 4000 \times 1{,}02^x.$$

Après 10 ans :

$$P(10) = 4000 \times 1{,}02^{10} \approx 4876.$$

Type 2 - Décroissance. Une quantité de médicament diminue de 18% par heure.

$$M(x) = M_0 \times 0{,}82^x.$$

Après une demi-heure :

$$M(0{,}5) = M_0 \times 0{,}82^{0{,}5} \approx 0{,}906 M_0.$$

Il reste environ 90,6% de la quantité initiale.

Type 3 - Taux moyen. Un prix passe de 75 à 90 euros en 3 ans.

$$C = \frac{90}{75} = 1{,}2, \qquad q_{\text{moy}} = 1{,}2^{1/3} \approx 1{,}063.$$

Le taux moyen annuel est environ 6,3%.

Erreurs fréquentes

— Confondre +20% avec coefficient 20. Le bon coefficient est 1,20.
— Confondre −20% avec coefficient −0,20. Le bon coefficient est 0,80.
— Additionner des taux successifs au lieu de multiplier les coefficients.
— Oublier que q^x est toujours positif.
— Utiliser une méthode avec logarithme : ce n'est pas attendu dans ce chapitre.

Mini-entraînement

1. Donner le coefficient associé à une baisse de 7%.
2. Une grandeur vaut 500 et augmente de 4% par an. Écrire le modèle.
3. Calculer $500 \times 1{,}04^6$ à l'unité près.
4. Une quantité diminue de 30% par jour. Donner le modèle si la quantité initiale vaut 80.
5. Une grandeur est multipliée par 1,5 en 4 ans. Calculer le taux moyen annuel.
6. $f(x) = 2 \times 0{,}9^x$. Donner le sens de variation et interpréter 0,9.

Corrections rapides

1. $q = 0{,}93$.
2. $V(x) = 500 \times 1{,}04^x$.
3. $500 \times 1{,}04^6 \approx 633$.
4. $Q(x) = 80 \times 0{,}70^x$.
5. $q_{\text{moy}} = 1{,}5^{1/4} \approx 1{,}107$. Taux moyen : environ 10,7%.
6. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, f est décroissante. Le coefficient 0,9 correspond à une baisse de 10% par unité de temps.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

À retenir en une page

Définition

$$f(x) = q^x, \quad q > 0, \quad x \geqslant 0.$$

Modèle général

$$V(x) = V_0 q^x.$$

Taux et coefficient

$$q = 1 + t, \qquad t = q - 1.$$

Variations

— $q > 1$: croissance.
— $0 < q < 1$: décroissance.
— $q = 1$: constante.

Valeurs clés

$$q^0 = 1, \qquad q^1 = q, \qquad q^x > 0.$$

Propriétés

$$q^{x+y} = q^x q^y$$

$$q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$$

$$(q^x)^y = q^{xy}$$

Racine n-ième

$$q^{1/n} = \sqrt[n]{q}.$$

Taux moyen

$$q_{\text{moy}} = C^{1/n}, \qquad t_{\text{moy}} = q_{\text{moy}} - 1.$$

Checklist avant une évaluation

— Je sais transformer un pourcentage en coefficient multiplicateur.
— Je sais écrire un modèle $V(x) = V_0 q^x$.
— Je sais reconnaître croissance et décroissance avec la valeur de q.
— Je sais calculer une valeur avec un exposant entier ou décimal.
— Je sais calculer un taux moyen à partir d'une évolution globale.
— Je sais résoudre un seuil en testant des valeurs ou avec un graphique.

Dernier exemple complet

Un capital de 1200 euros augmente de 3% par an.

$$C(x) = 1200 \times 1{,}03^x.$$

Au bout de 8 ans :

$$C(8) = 1200 \times 1{,}03^8 \approx 1520.$$

Pour savoir quand il dépasse 1500 euros, on teste :

$$C(7) \approx 1476 < 1500, \qquad C(8) \approx 1520 > 1500.$$

Conclusion : le capital dépasse 1500 euros au bout de 8 ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Fonctions polynômes du second degré

Première générale - Forme canonique, discriminant et représentation

1. Définition

Une fonction polynôme du second degré est définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

Sa courbe est une **parabole**.

- Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.
- $c = f(0)$ est l'ordonnée à l'origine.

2. Les trois formes

Développée	$ax^2 + bx + c$
Canonique	$a(x-\alpha)^2 + \beta$
Factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$

- Forme canonique : sommet et variations.
- Forme factorisée : racines et signe.
- Forme développée : calcul du discriminant.

3. Sommet et forme canonique

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = f(\alpha).$$

Donc

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Le sommet est

$$S(\alpha;\beta).$$

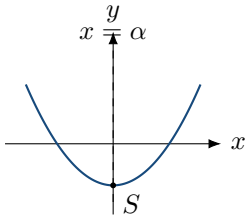
L'axe de symétrie est la droite

$$x = \alpha.$$

4. Variations

Pour $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$:

- si $a > 0$, f décroît puis croît : minimum β en $x = \alpha$;
- si $a < 0$, f croît puis décroît : maximum β en $x = \alpha$.



5. Discriminant

Pour résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- $\Delta > 0$: deux solutions.
- $\Delta = 0$: une solution double.
- $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

6. Formules des racines

Si $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

7. Factorisation

- Si $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

- Si $\Delta = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2.$$

- Si $\Delta < 0$: pas de factorisation réelle par racines.

8. Signe du trinôme

Si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$a > 0$	$+$		0	$-$	0	$+$
$a < 0$	$-$		0	$+$	0	$-$

Phrase à retenir : **du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre les racines.**

9. Méthodes rapides

- Sommet : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ puis $\beta = f(\alpha)$.
- Résoudre $f(x) = 0$: calculer Δ.
- Étudier le signe : trouver les racines puis utiliser le signe de a.
- Tracer : sommet, axe de symétrie, racines, ordonnée à l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Exemple complet

Soit

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Sommet :

$$\alpha = -\frac{-4}{2} = 2, \quad \beta = f(2) = -1.$$

Donc

$$f(x) = (x-2)^2 - 1.$$

Discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4.$$

Racines :

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 3.$$

Factorisation :

$$f(x) = (x-1)(x-3).$$

Signe : $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $[1; 3]$.

11. Mini-entraînement corrigé

Résoudre et étudier le signe de

$$g(x) = -x^2 + 5x - 6.$$

On a $a = -1$, $b = 5$, $c = -6$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1.$$

Racines :

$$x_1 = \frac{-5-1}{-2} = 3, \qquad x_2 = \frac{-5+1}{-2} = 2.$$

Donc les racines sont 2 et 3. Comme $a < 0$:

$$g(x) > 0 \iff x \in]2; 3[.$$

12. Pièges fréquents

- Oublier que $a \neq 0$.
- Se tromper dans $\Delta = b^2 - 4ac$ quand b ou c est négatif.
- Écrire les racines dans le mauvais ordre dans le tableau de signes.
- Confondre racine et sommet : les racines sont sur l'axe des abscisses, le sommet est l'extremum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Dérivation

Première générale - Mathématiques intégrées à l'enseignement scientifique

1. Variation moyenne et nombre dérivé

Pour une fonction f, le taux de variation entre a et b est :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (a \neq b).$$

C'est le coefficient directeur de la sécante passant par $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.
Au voisinage de a, on écrit $b = a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si ce nombre se rapproche d'une valeur quand h se rapproche de 0, cette valeur est le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

2. Interprétation graphique

- $f(a)$ est l'ordonnée du point de la courbe.
- $f'(a)$ est une pente : le coefficient directeur de la tangente.
- Si $f'(a) > 0$, la courbe monte localement.
- Si $f'(a) < 0$, la courbe descend localement.
- Si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale.

3. Tangente : formule à connaître

Si f est dérivable en a, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Méthode : calculer $f(a)$, calculer $f'(a)$, remplacer dans la formule, simplifier.

Exemple express

Pour $f(x) = x^2 - 3x + 1$, on veut la tangente en $a = 2$.

$$f'(x) = 2x - 3, \quad f'(2) = 1, \quad f(2) = -1.$$

Donc

$$y = 1(x-2) - 1 = x - 3.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Fonction dérivée : tableau essentiel

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
c constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Règles utilisées dans ce chapitre :

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (ku)' = ku'.$$

Donc, pour un polynôme de degré au plus 3, on dérive terme par terme.

Exemple : dériver un polynôme

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 7.$$

À ne pas oublier : la dérivée d'une constante vaut 0.

5. Signe de la dérivée et variations

Sur un intervalle :

Signe de f'	Variation de f
$f'(x) > 0$	f est croissante
$f'(x) < 0$	f est décroissante
$f'(x) = 0$	tangente horizontale / palier possible

Pour conclure sur un maximum ou un minimum, on regarde le changement de variation.

6. Méthode complète d'étude de variations

1. Calculer $f'(x)$.
2. Factoriser $f'(x)$ si possible ou repérer son signe.
3. Faire le tableau de signes de f'.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. Calculer les valeurs utiles : extrémités, minimum, maximum.

Exemple de variations

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{sur } [0;5].$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2).$$

Donc $f' < 0$ sur $[0;2[$ et $f' > 0$ sur $]2;5]$.

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -3, \quad f(5) = 6.$$

f est décroissante sur $[0;2]$, puis croissante sur $[2;5]$. Minimum : -3 atteint pour $x = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Mini-entraînement

A. Calculer le taux de variation de $f(x) = x^2 + 1$ entre 1 et 4.
B. Déterminer l'équation de la tangente à $f(x) = x^2 - 2x + 3$ au point d'abscisse 1.
C. Calculer la dérivée de $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 9$.
D. Étudier les variations de $h(x) = x^2 - 6x + 5$ sur $[0; 7]$.

8. Corrections rapides

A.

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{17 - 2}{3} = 5.$$

B. $f'(x) = 2x - 2$, donc $f'(1) = 0$ et $f(1) = 2$. Tangente :

$$y = 0(x - 1) + 2 = 2.$$

C.

$$g'(x) = 9x^2 - 4x + 5.$$

D.

$$h'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3).$$

Donc h décroît sur $[0; 3]$, puis croît sur $[3; 7]$. Minimum :

$$h(3) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

9. Les erreurs à éviter

— Confondre $f(a)$ et $f'(a)$: valeur contre pente.
— Oublier que la dérivée d'une constante est 0.
— Dire qu'un maximum/minimum existe seulement parce que $f'(x) = 0$: il faut vérifier les variations.
— Utiliser des règles hors programme : produit, quotient, composée, limites avancées.

Phrase de conclusion type

Comme $f'(x)$ est négative puis positive, la fonction f est décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum pour la valeur de x où le signe change de $-$ à $+$.

À maîtriser : taux de variation, nombre dérivé, tangente, dérivées usuelles, tableau de variations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Statistiques à deux variables

Première générale - nuage de points, ajustement affine, corrélation

Série statistique à deux variables

Une série associe deux nombres à chaque individu :

$$(x_1 ; y_1), \dots, (x_n ; y_n).$$

Le point $M_i(x_i ; y_i)$ est placé dans un repère.

Nuage de points

Le nuage permet d'observer une tendance :

- montant : corrélation positive ;
- descendant : corrélation négative ;
- très dispersé : lien faible ou absent ;
- presque aligné : ajustement affine possible.

Point moyen

$$G(\bar{x} ; \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

Il représente le centre du nuage, sans être forcément un point observé.

Ajustement affine

Ajuster un nuage par une droite, c'est utiliser :

$$y = ax + b.$$

Ce modèle est pertinent si les points sont globalement proches d'une droite.

Droite passant par deux points

Pour $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \qquad y_A = ax_A + b.$$

Méthode de Mayer

1. Ranger les points par abscisses croissantes.
2. Couper le nuage en deux groupes.
3. Calculer les points moyens G_1 et G_2.
4. Tracer la droite (G_1G_2) puis écrire son équation.

Interpolation / extrapolation

Avec $y = ax + b$:

- **interpolation** : estimation dans l'intervalle observé ;
- **extrapolation** : estimation en dehors de l'intervalle observé.

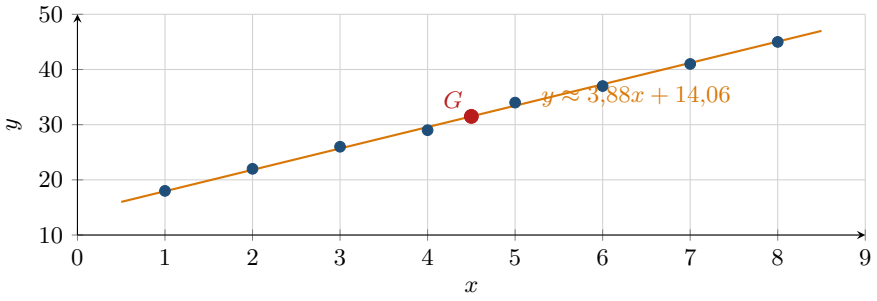
Une extrapolation est plus risquée.

Corrélation ≠ causalité

Si deux variables évoluent ensemble, cela ne prouve pas que l'une cause l'autre. Un troisième facteur peut expliquer les deux phénomènes.

Méthode express

1. Identifier les variables et unités.
2. Lire ou tracer le nuage.
3. Décrire la tendance.
4. Calculer G si demandé.
5. Déterminer une droite $y = ax + b$.
6. Estimer puis conclure avec prudence.



mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Applications types

Type 1 - Calculer un point moyen

x	2	4	6	8	10
y	5	8	9	12	16

$$\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6, \qquad \bar{y} = \frac{5+8+9+12+16}{5} = 10.$$

Donc $G(6;10)$.

Type 2 - Déterminer une droite de Mayer

x	1	2	3	4	5	6
y	4	6	7	9	10	12

Groupe 1 : $(1;4), (2;6), (3;7)$, donc

$$G_1\left(2; \frac{4+6+7}{3}\right) = G_1(2;5{,}67).$$

Groupe 2 : $(4;9), (5;10), (6;12)$, donc

$$G_2\left(5; \frac{9+10+12}{3}\right) = G_2(5;10{,}33).$$

$$a = \frac{10{,}33 - 5{,}67}{5-2} \approx 1{,}55.$$

Avec G_1 : $5{,}67 = 1{,}55 \times 2 + b$, donc $b \approx 2{,}57$.

$$\boxed{y \approx 1{,}55x + 2{,}57}$$

Type 3 - Utiliser une droite d'ajustement

On utilise le modèle $y = 2{,}4x + 7$, obtenu avec des données où $0 \leq x \leq 12$.

— Pour $x = 5$: $y = 2{,}4 \times 5 + 7 = 19$. C'est une interpolation.

— Pour $x = 15$: $y = 2{,}4 \times 15 + 7 = 43$. C'est une extrapolation, donc l'estimation est plus fragile.

Checklist

Avant de répondre : unités, pertinence de l'ajustement, interpolation ou extrapolation, conclusion sans causalité abusive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Mini-entraînement corrigé

Exercice 1

Une série est donnée par :

x	1	3	5	7
y	10	14	19	23

1. Calculer le point moyen.
2. Le nuage semble croissant. Quel type de corrélation cela suggère-t-il ?

Correction 1

$$\bar{x} = \frac{1+3+5+7}{4} = 4, \qquad \bar{y} = \frac{10+14+19+23}{4} = 16{,}5.$$

Donc $G(4;16{,}5)$. Le nuage croissant suggère une corrélation positive.

Exercice 2

Une droite d'ajustement a pour équation $y = 1{,}8x + 12$. Les données observées vont de $x = 0$ à $x = 20$.

1. Estimer y pour $x = 15$.
2. Estimer y pour $x = 25$.
3. Dire quelle estimation est la plus prudente.

Correction 2

$$y(15) = 1{,}8 \times 15 + 12 = 39.$$

Comme $15 \in [0;20]$, c'est une interpolation.

$$y(25) = 1{,}8 \times 25 + 12 = 57.$$

Comme $25 \notin [0;20]$, c'est une extrapolation. L'estimation pour $x = 15$ est plus fiable.

Formules à connaitre

$$G(\bar{x};\bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

$$y = ax + b, \qquad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Probabilités conditionnelles

Première générale - arbres pondérés, indépendance, tableaux croisés

1. Vocabulaire essentiel

- $A \cap B$: A et B sont réalisés.
- $A \cup B$: au moins l'un des deux est réalisé.
- $\overline{A}$: événement contraire de A.
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. Probabilité conditionnelle

Si $\mathbb{P}(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Formule équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)\,.$$

Attention

$$\mathbb{P}_A(B) \neq \mathbb{P}_B(A) \quad \text{en général.}$$

"Sachant A" signifie que l'on se place parmi les cas où A est réalisé.

Exemple rapide

Dans une classe, 40 % des élèves sont en option musique et 25 % sont des filles en option musique. Il y a 50 % de filles.

$$\mathbb{P}_F(M) = \frac{\mathbb{P}(F \cap M)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0{,}25}{0{,}50} = 0{,}5.$$

Parmi les filles, 50 % sont en option musique.

3. Tableau croisé

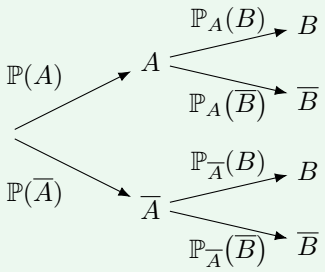
Un tableau croisé sert à lire des effectifs ou des fréquences conditionnelles.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	A
$\overline{A}$	$\overline{A} \cap B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A}$
Total	B	$\overline{B}$	Ω

Avec des effectifs :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}.$$

4. Arbre pondéré



- Sur des branches issues d'un même noeud : somme $= 1$.
- Un chemin : on multiplie.
- Plusieurs chemins : on additionne.

Probabilités totales

Si A et $\overline{A}$ forment le premier niveau de l'arbre :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\,.\end{aligned}$$

5. Renverser un conditionnement

Pour calculer $\mathbb{P}_B(A)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Il faut donc souvent calculer d'abord $\mathbb{P}(B)$ par addition de chemins.

6. Indépendance

A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre.

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

ou, de façon équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Piège classique

Indépendants ne veut pas dire incompatibles. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Méthodes et entraînement

Probabilités conditionnelles - Première générale

Méthode 1 - Calculer une probabilité conditionnelle

1. Repérer l'événement placé après "sachant".
2. Calculer la probabilité de l'intersection.
3. Diviser par la probabilité de l'événement connu.

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Méthode 2 - Utiliser un arbre

1. Compléter les branches complémentaires.
2. Multiplier sur chaque chemin.
3. Additionner les chemins qui donnent l'événement demandé.

Méthode 3 - Tester l'indépendance

Comparer :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Si les deux nombres sont égaux, A et B sont indépendants. Sinon, ils ne le sont pas.

Succession indépendante

Si des expériences sont indépendantes, on multiplie les probabilités.
Exemple : une réussite a probabilité 0,7. La probabilité de trois réussites successives vaut :

$$0{,}7^3 = 0{,}343.$$

Calculer "au moins un"

Passer par le contraire :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un}) = 1 - \mathbb{P}(\text{aucun}).$$

Exemple : si un événement a probabilité 0,2 à chaque essai indépendant, la probabilité qu'il arrive au moins une fois en 5 essais est :

$$1 - 0{,}8^5 \approx 0{,}672.$$

Mini-exercice 1

On sait que $\mathbb{P}(A) = 0{,}6$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}18$.

1. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$.
2. Interpréter le résultat.

Mini-exercice 2

On donne $\mathbb{P}(A) = 0{,}4$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}2$.

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$.

Mini-exercice 3

Une machine produit 3 % de pièces défectueuses. Les productions sont indépendantes.

1. Probabilité que 4 pièces soient conformes ?
2. Probabilité qu'au moins une des 4 pièces soit défectueuse ?

Corrections rapides

Ex. 1

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3.$$

Sachant que A est réalisé, la probabilité de B est 30 %.

Ex. 2

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2.$$

Donc A et B sont indépendants.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$$

Ex. 3 Une pièce est conforme avec probabilité 0,97.

$$\mathbb{P}(\text{4 conformes}) = 0{,}97^4 \approx 0{,}885.$$

$$\mathbb{P}(\text{au moins une défectueuse}) = 1 - 0{,}97^4 \approx 0{,}115.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Exemple complet

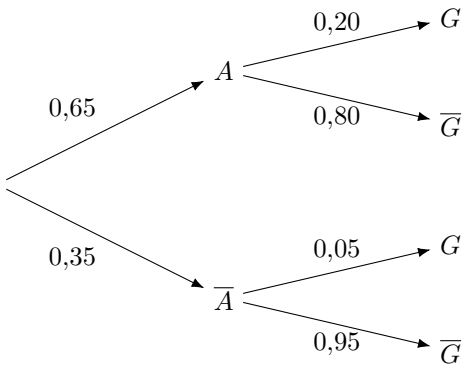
Arbre pondéré et conditionnement inversé

Situation

Dans une boutique, 65 % des clients achètent un produit A. Parmi ceux qui achètent A, 20 % prennent aussi une garantie. Parmi ceux qui n'achètent pas A, 5 % prennent une garantie.
On note :

— A : "le client achète le produit A" ;

— G : "le client prend une garantie".



1. Probabilité d'un chemin

$$\mathbb{P}(A \cap G) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G)$$

$$\mathbb{P}(A \cap G) = 0{,}65 \times 0{,}20 = 0{,}13.$$

Donc 13 % des clients achètent A et prennent une garantie.

2. Probabilité totale de G

Deux chemins conduisent à G :

$$A \cap G \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap G.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= 0{,}65 \times 0{,}20 + 0{,}35 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}13 + 0{,}0175 \\ &= 0{,}1475.\end{aligned}$$

La probabilité de prendre une garantie est 14,75 %.

3. Conditionnement inversé

On cherche la probabilité qu'un client ait acheté A sachant qu'il a pris une garantie :

$$\mathbb{P}_G(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap G)}{\mathbb{P}(G)}.$$

$$\mathbb{P}_G(A) = \frac{0{,}13}{0{,}1475} \approx 0{,}881.$$

Donc environ 88,1 % des clients ayant pris une garantie ont acheté le produit A.

À retenir absolument

— Sur une branche : probabilité conditionnelle.

— Sur un chemin : produit.

— Sur plusieurs chemins : somme.

— Pour "sachant que" : diviser par la probabilité de ce que l'on sait.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).