MathLvl

Fiches de révision de maths

Première spé maths

14 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Second degré p. 2
2. Polynômes de degré 2 et 3 p. 7
3. Dérivation locale p. 8
4. Dérivation et étude des fonctions p. 10
5. Variations et extremums p. 11
6. Suites arithmétiques et géométriques p. 12
7. Trigonométrie p. 13
8. Produit scalaire dans le plan p. 14
9. Géométrie repérée p. 16
10. Probabilités conditionnelles p. 18
11. Variables aléatoires p. 19
12. Échantillonnage p. 22
13. Algorithmique et Python p. 24
14. Fonction exponentielle p. 25

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Fiche de revision

Premiere specialite - Second degre

Formules essentielles, methodes et reflexes pour les exercices.

Objectifs du chapitre

Savoir manipuler une fonction du second degre, choisir la bonne forme, resoudre une equation, etudier un signe, lire les variations et resoudre des problemes simples d'optimisation.

1. Definition

Une fonction polynome du second degre est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ou a, b, c sont des reels et surtout :

$$a \neq 0.$$

Sa courbe representative est une **parabole**.

Sens de la parabole

- Si $a > 0$, la parabole est tournee vers le haut.
- Si $a < 0$, la parabole est tournee vers le bas.

2. Les trois formes

Forme developpee

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Elle est utile pour identifier a, b, c et calculer le discriminant.

Forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = f(\alpha).$$

Le sommet de la parabole est :

$$S(\alpha; \beta).$$

Autre formule utile

Si $\Delta = b^2 - 4ac$, alors :

$$\beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Cette formule sert surtout a verifier un calcul.

Forme factorisee

Quand elle existe :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ou x_1 et x_2 sont les racines de f.

Elle est tres pratique pour lire les solutions de $f(x) = 0$ et pour etudier le signe.

3. Le discriminant

Pour resoudre :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on calcule :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Nombre de solutions

Condition	Conclusion
$\Delta > 0$	deux racines reelles distinctes
$\Delta = 0$	une racine double
$\Delta < 0$	aucune racine reelle

Cas $\Delta > 0$

Il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Alors :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Cas $\Delta = 0$

Il y a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Alors :

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Cas $\Delta < 0$

Il n'y a aucune racine reelle. La forme factorisee dans $\mathbb{R}$ n'existe pas.

Attention au signe de b

Si $b = -5$, alors :

$$b^2 = (-5)^2 = 25.$$

Ne pas ecrire $-5^2 = -25$ par erreur.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Signe d'un trinome

Phrase essentielle :

Regle de signe

Un trinome du second degre est du signe de a, sauf entre ses racines quand elles existent.

Si $\Delta > 0$

On note les racines dans l'ordre :

$$x_1 < x_2.$$

x	$-\infty$		x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a		0	signe de $-a$	0	signe de a

Donc :

— a l'exterieur des racines : signe de a ;

— entre les racines : signe oppose a a.

Si $\Delta = 0$

Il y a une racine double x_0.

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Comme un carre est toujours positif ou nul, f garde le signe de a, sauf en x_0 ou $f(x_0) = 0$.

Si $\Delta < 0$

Il n'y a pas de racine. Le trinome est toujours du signe de a.

5. Variations

On utilise la forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Le sommet est :

$$S(\alpha; \beta).$$

Variations selon le signe de a

— Si $a > 0$, la fonction descend puis remonte : elle admet un minimum β atteint en $x = \alpha$.

— Si $a < 0$, la fonction monte puis redescend : elle admet un maximum β atteint en $x = \alpha$.

Tableaux de variations

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

6. Choisir la bonne forme

Objectif	Forme conseillee
Calculer Δ	developpee
Resoudre $f(x) = 0$	discriminant ou factorisee
Etudier le signe	factorisee, ou tableau avec les racines
Trouver le sommet	canonique
Etudier les variations	canonique
Optimiser une grandeur	canonique
Lire les racines	factorisee

Reflexe important

Ne cherche pas a tout faire avec une seule forme. En exercice, il faut souvent passer d'une forme a une autre selon la question.

7. Somme et produit des racines

Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces formules servent surtout a verifier des racines ou a factoriser plus vite dans des cas simples.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Methodes types

Methode 1 - Resoudre une equation du second degre

Pour resoudre $ax^2+bx+c=0$:

1. Identifier a, b, c.
2. Calculer $\Delta = b^2-4ac$.
3. Regarder le signe de Δ.
4. Donner les solutions avec les bonnes formules.

Exemple corrige

Resoudre :

$$2x^2-5x+2=0.$$

On identifie :

$$a=2, \quad b=-5, \quad c=2.$$

Puis :

$$\Delta = (-5)^2-4\times 2\times 2 = 25-16 = 9.$$

Comme $\Delta>0$, il y a deux solutions :

$$x_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}, \qquad x_2=\frac{5+3}{4}=2.$$

Donc :

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{2};2\right\}}.$$

Methode 2 - Etudier un signe

Pour etudier le signe de $f(x)$:

1. Calculer les racines avec Δ.
2. Les placer dans l'ordre sur une ligne.
3. Utiliser la regle : signe de a a l'exterieur, signe oppose entre les racines.

Exemple corrige

Etudier le signe de :

$$f(x)=2x^2-5x+2.$$

On a trouve :

$$x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=2.$$

Comme $a=2>0$, le signe est positif a l'exterieur et negatif entre les racines.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0		$-$	0	$+$

Donc :

$$f(x)>0 \text{ sur }]-\infty;\tfrac{1}{2}[\ \cup\ ]2;+\infty[,$$

$$f(x)<0 \text{ sur }]\tfrac{1}{2};2[,$$

$$f(x)=0 \text{ pour } x=\tfrac{1}{2} \text{ ou } x=2.$$

Methode 3 - Resoudre une inequation

Pour resoudre $f(x)\leq 0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$ ou $f(x)>0$:

1. Faire le tableau de signe de f.
2. Lire les intervalles qui correspondent au signe demande.
3. Inclure les racines seulement si l'inegalite est large : $\leq$ ou $\geq$.

Exemple :

$$2x^2-5x+2\leq 0.$$

On lit dans le tableau :

$$\boxed{x\in\left[\frac{1}{2};2\right]}.$$

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Passer a la forme canonique

La forme canonique est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Elle permet de trouver rapidement le sommet et les variations.

Methode rapide

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = f(\alpha).$$

Puis :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta.$$

Exemple corrige

Soit :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3.$$

On identifie :

$$a = 2, \quad b = -8.$$

Donc :

$$\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Puis :

$$\beta = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3.$$

$$\beta = 8 - 16 + 3 = -5.$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = 2(x-2)^2 - 5}.$$

Le sommet est :

$$\boxed{S(2;-5)}.$$

Comme $a = 2 > 0$, la fonction admet un minimum egal a -5 pour $x = 2$.

Pourquoi la forme canonique est utile ?

Dans

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

la partie $(x-\alpha)^2$ est toujours positive ou nulle. Le meilleur endroit est donc souvent $x = \alpha$.

Erreur frequente

Ne pas confondre :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et une racine. α donne l'abscisse du sommet, pas forcement une solution de $f(x) = 0$.

Lien avec le discriminant

La forme canonique permet aussi de comprendre le nombre de racines :

- si le sommet est sous l'axe et $a > 0$, la courbe coupe l'axe deux fois ;
- si le sommet touche l'axe, il y a une racine double ;
- si la courbe ne touche pas l'axe, il n'y a pas de racine reelle.

10. Probleme d'optimisation

Un probleme d'optimisation demande de trouver un maximum ou un minimum.

Reflexe optimisation

Quand une grandeur s'ecrit sous la forme $ax^2 + bx + c$, on passe en forme canonique. Le maximum ou le minimum est donne par le sommet.

Exemple

On considere :

$$A(x) = -2x^2 + 12x + 5.$$

Comme $a = -2 < 0$, la fonction admet un maximum.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-2)} = 3.$$

$$\beta = A(3) = -2 \times 9 + 12 \times 3 + 5 = 23.$$

Donc le maximum est :

$$\boxed{23}$$

atteint pour :

$$\boxed{x = 3}.$$

Phrase type de conclusion

La grandeur est maximale pour $x = \alpha$, et cette valeur maximale est β.
La grandeur est minimale pour $x = \alpha$, et cette valeur minimale est β.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

11. Les erreurs classiques a eviter

1. Oublier que $a \neq 0$

Si $a = 0$, ce n'est pas une fonction du second degre.

2. Se tromper dans le discriminant

La formule est :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Ce n'est pas $b^2 + 4ac$.

3. Oublier les parentheses

Si $b = -7$, alors :

$$b^2 = (-7)^2 = 49.$$

4. Oublier le denominateur

Les racines sont divisees par :

$$2a.$$

Pas seulement par 2.

5. Se tromper sur les intervalles

Pour une inegalite stricte $<$ ou $>$, on ne prend pas les racines.
Pour une inegalite large $\leq$ ou $\geq$, on prend les racines.

6. Confondre racine et sommet

Une racine est une solution de $f(x) = 0$.
Le sommet est le point $S(\alpha; \beta)$ de la parabole.

12. Resume express a apprendre

Formules indispensables

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}, \qquad \boxed{\beta = f(\alpha)}$$

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$

— Si $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$: aucune solution reelle.

Signe et variations

— Signe : signe de a, sauf entre les racines.

— Si $a > 0$: minimum au sommet.

— Si $a < 0$: maximum au sommet.

— Forme canonique : meilleure forme pour les variations et l'optimisation.

— Forme factorisee : meilleure forme pour les racines et le signe.

Reflexe final : identifier a, b, c $\rightarrow$ calculer Δ ou α selon la question $\rightarrow$ choisir la forme utile.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Polynômes de degré 2 et 3

Première spé maths

1. Trois formes du second degré

Développée : $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.
Factorisée : $a(x-x_1)(x-x_2)$.

2. Discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$.
$\Delta > 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$: racine double $-\frac{b}{2a}$.
$\Delta < 0$: pas de racine réelle.

3. Somme et produit

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

Racine évidente 1 : $a+b+c=0$, l'autre vaut $\frac{c}{a}$.

4. Signe

Signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles.
$\Delta < 0$: signe de a partout.

5. Factoriser : stratégies

Racine évidente, somme et produit, identité remarquable, puis formules générales.
Trinôme s'annulant en x_1 et x_2 : $a(x-x_1)(x-x_2)$.

6. Degré 3 (racine connue)

Si $P(r)=0$, alors $P(x) = (x-r)Q(x)$, Q du second degré (identification des coefficients).
On étudie ensuite Q avec le discriminant.

7. Variations

$f(x) = ax^2 + bx + c$: extremum en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
Degré 3 : signe de f' (trinôme), puis tableau de variations.

Pièges

- oublier a dans $a(x-x_1)(x-x_2)$;
- signe de $\sqrt{\Delta}$ et de $2a$;
- forme adaptée à la question.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision
Dérivation locale – Première spécialité maths

Objectif : comprendre $f'(a)$, le calculer localement et écrire une tangente.

À retenir en une phrase

Le nombre dérivé $f'(a)$ est la **pente de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. Taux de variation

Entre deux nombres a et b avec $a \neq b$:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

C'est une **variation moyenne**. Graphiquement, c'est le coefficient directeur de la **sécante** passant par :

$$A(a;f(a)) \quad \text{et} \quad B(b;f(b)).$$

Avec $b = a+h$:

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \quad (h \neq 0)$$

2. Nombre dérivé

f est dérivable en a si le taux de variation admet une limite quand h tend vers 0 :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

On passe d'une variation **moyenne** à une variation **instantanée**.

3. Interprétation graphique

Valeur	Sens graphique
$f'(a) > 0$	tangente montante
$f'(a) < 0$	tangente descendante
$f'(a) = 0$	tangente horizontale
$\lvert f'(a)\rvert$ **grand**	tangente très pentue

4. Équation de la tangente

Si f est dérivable en a, la tangente au point d'abscisse a a pour équation :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

À connaître par coeur.

Méthode : écrire une tangente

1. Identifier a.
2. Calculer $f(a)$.
3. Calculer ou lire $f'(a)$.
4. Remplacer dans $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Lecture graphique de $f'(a)$

Si la tangente est déjà tracée :

1. choisir deux points lisibles $P(x_P;y_P)$ et $Q(x_Q;y_Q)$ sur la tangente ;
2. calculer son coefficient directeur :

$$\boxed{f'(a) = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}}$$

Ne pas confondre

— $f(a)$: hauteur du point sur la courbe.
— $f'(a)$: pente de la tangente.

Exemple : si $f(2) = 5$ et $f'(2) = -3$, alors le point est $(2;5)$ et la tangente descend.

Exemple 1 : calcul avec la définition

Soit $f(x) = x^2$. Calculer $f'(3)$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-9}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = 6+h.$$

Quand $h \to 0$, $6+h \to 6$. Donc :

$$\boxed{f'(3) = 6}$$

La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation :

$$y = 6(x-3)+f(3) = 6(x-3)+9 = \boxed{6x-9}.$$

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Dérivation locale – exercices types et pièges

Exemple 2 : avec les infos données

On sait que :

$$f(2) = 5 \quad \text{et} \quad f'(2) = -3.$$

L'équation de la tangente en $a = 2$ est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$y = -3(x - 2) + 5 = -3x + 6 + 5.$$

Donc :

$$\boxed{y = -3x + 11}$$

Interprétation : la tangente est **descendante** car $f'(2) < 0$.

Exemple 3 : tangente horizontale

Si $f'(a) = 0$, alors :

$$y = 0(x - a) + f(a)$$

Donc :

$$\boxed{y = f(a)}$$

La tangente est une droite horizontale.

Formule utile pour une droite

Le coefficient directeur d'une droite passant par deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ est :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Pour une tangente, ce coefficient directeur vaut $f'(a)$.

Méthode : calculer $f'(a)$ par définition

1. Écrire : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
2. Développer et simplifier.
3. Factoriser par h si possible.
4. Simplifier par h.
5. Faire tendre h vers 0.

Pièges fréquents

- Oublier que $h \neq 0$ avant la limite.
- Confondre $f'(a)$ avec $f(a)$.
- Dire que $f'(a) > 0$ signifie forcément que la fonction est croissante partout : ici, on parle seulement **autour du point** a.
- Écrire la tangente sans le $+f(a)$.
- Remplacer a par x dans la formule de tangente.

Mémo final

Taux moyen : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Nombre dérivé : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

À savoir faire en contrôle

- Calculer un taux de variation.
- Calculer $f'(a)$ avec la définition dans un cas simple.
- Lire $f'(a)$ avec une tangente sur un graphique.
- Trouver l'équation d'une tangente.
- Interpréter le signe de $f'(a)$.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Dérivation et étude des fonctions

Première spé maths

1. Fonction dérivée

f dérivable sur I : dérivable en tout $a \in I$.
$f'(a)$ = limite du taux $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
$f'(x)$ = pente de la tangente en x.

2. Dérivées de référence

$(k)' = 0$; $(mx+p)' = m$
$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

3. Opérations

$(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4. Méthode

Dernière opération → règle.
Calculer u', v' à part.
Simplifier, **factoriser** (pour le signe).
Préciser l'ensemble de validité.

5. Non dérivables

$\sqrt{x}$ en 0 : taux $\frac{1}{\sqrt{h}}$, tangente verticale.
$|x|$ en 0 : taux ± 1, angle.

6. Démonstrations

Carré : taux $= 2a + h \to 2a$.
Inverse : taux $= \frac{-1}{a(a+h)} \to -\frac{1}{a^2}$.
Produit : ajouter et retrancher $u(a)v(a+h)$.

Pièges

— $(uv)' \neq u'v'$;
— $\left(\frac{u}{v}\right)'$: $u'v - uv'$, dans cet ordre ;
— $(5x)' = 5$, $(5)' = 0$;
— valeurs interdites.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Variations et extremums

Première spé maths

1. Parité

Domaine symétrique par rapport à 0.
Paire : $f(-x) = f(x)$; symétrie / axe des ordonnées.
Impaire : $f(-x) = -f(x)$; symétrie / origine.
Ni l'un ni l'autre : un contre-exemple.

2. Dérivée et variations

Sur un **intervalle** :
$f' > 0$: strictement croissante ;
$f' < 0$: strictement décroissante ;
$f' = 0$: constante.

3. Méthode

Ensemble d'étude $\to$ f' $\to$ factoriser $\to$ signe $\to$ tableau de variations avec valeurs.

4. Extremums

Extremum local en a (intérieur) $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$, tangente horizontale.
f' s'annule **en changeant de signe** $\Rightarrow$ extremum.
x^3 en 0 : pas d'extremum.

5. Second degré

$f(x) = ax^2 + bx + c$: $f'(x) = 2ax + b$.
Extremum en $-\dfrac{b}{2a}$: max si $a < 0$, min si $a > 0$.

6. Applications

Optimisation : variable, intervalle, fonction, variations, phrase.
Inégalité $f \geq g$: minimum de $f - g$.
Position relative : signe de $f - g$.

7. Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$\sqrt{2}$: $1 \to 1{,}5 \to 1{,}4167 \to 1{,}41422$.

Pièges

— $f'(a) = 0$ sans changement de signe ;
— $\frac{1}{x}$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$;
— parité : pour tout x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Suites arithmétiques et géométriques

Première spé maths

1. Génération

explicite $u_n = f(n)$; récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

2. Arithmétique

$u_n = u_0 + nr$; $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. Géométrique

$u_n = u_0 q^n$; $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

4. Variation

signe de $u_{n+1} - u_n$

5. Limite

conjecturer par le calcul : finie, infinie ou absente

Pièges

— Se tromper sur le nombre de termes : de u_0 à u_n, il y en a $n + 1$.
— Confondre raison arithmétique (on ajoute) et géométrique (on multiplie) ; pour $+3\,\%$, $q = 1{,}03$, pas $0{,}03$.
— Conclure à une limite à partir de quelques termes seulement.
— Relier les points du nuage d'une suite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Trigonométrie

Première spé maths

1. Radian

π rad $= 180°$; $\theta = \frac{\pi}{180} d$.
Arc sur un cercle de rayon r : $L = r\theta$.
$30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$.

2. Image d'un réel

Cercle de rayon 1, sens direct.
On enroule la droite depuis I.
x et $x + 2k\pi$: même image.

3. Cosinus et sinus

$M(\cos x\,;\sin x)$: abscisse et ordonnée.
$-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4. Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5. Angles associés

$\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

6. Méthode

Placer le point → valeur remarquable associée → signes (gauche/droite, haut/bas) → valeurs.
$\frac{2\pi}{3}$: $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pièges

— calculatrice en radians ;
— cosinus = abscisse ;
— signes selon le quart de cercle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

PRODUIT SCALAIRE

Maths Spécialité — 1ère | Fiche de révision

1. DÉFINITION

Soient u et v deux vecteurs, θ l'angle entre eux (0 ≤ θ ≤ π) :

$$\mathbf{u \cdot v = ||u|| \times ||v|| \times \cos \theta}$$

• θ = 90° → u · v = 0 (orthogonaux) • u · v > 0 → θ aigu • u · v < 0 → θ obtus

2. FORMULES DE CALCUL (les 4 à maîtriser)

Avec les coordonnées	Avec les normes (identité remarquable)
$u \cdot v = xu\ xv + yu\ yv$	**$u \cdot v = ½ (||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)$**
où u = (xu, yu) et v = (xv, yv)	Développement du carré de la somme

Formule Al-Kashi (norme de la différence)	Projeté orthogonal
$u \cdot v = ½ (||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2)$	**$u \cdot v = ||u|| \times OH$ (H = projeté de l'extrémité de v sur la dir. de u)**
Très utile dans les triangles quand on connaît les 3 côtés	Utile dans les triangles avec hauteurs ou projections

3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES (avec exemples)

Propriété	Formule	Exemple concret
Commutativité	**$u \cdot v = v \cdot u$**	*u=(1,2), v=(3,4) u·v = 1×3+2×4 = 11 v·u = 3×1+4×2 = 11 ✓*
Distributivité (bilinéarité)	**$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w$**	*u=(1,0), v=(0,1), w=(2,3) (u+v)·w = (1,1)·(2,3) = 5 u·w + v·w = 2+3 = 5 ✓*
Homogénéité	**$(\lambda u)\cdot v = \lambda(u\cdot v)$**	*λ=3, u=(1,2), v=(2,1) (3u)·v = (3,6)·(2,1) = 12 3×(u·v) = 3×4 = 12 ✓*
Carré scalaire	**$u\cdot u = ||u||^2$**	*u=(3,4) → ||u|| = 5 u·u = 9+16 = 25 = 5² ✓ (donne la longueur !)*
Développement $||u+v||^2$	**$||u+v||^2 = ||u||^2 + 2(u\cdot v) + ||v||^2$**	*u=(1,0), v=(0,1) → u·v = 0 $||u+v||^2$ = 2 ; 1+0+1 = 2 ✓ (retrouve Pythagore !)*
Développement $||u-v||^2$	**$||u-v||^2 = ||u||^2 - 2(u\cdot v) + ||v||^2$**	*u=(3,0), v=(1,0) → u·v = 3 $||u-v||^2$ = 4 ; 9-6+1 = 4 ✓*

© mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. ORTHOGONALITÉ & APPLICATIONS

$u \perp v \iff u \cdot v = 0$

→ Droites perpendiculaires : leurs vecteurs directeurs ont un produit scalaire nul. → Triangle ABC rectangle en A : AB · AC = 0 → Hauteur AH d'un triangle (H sur BC) : AH · BC = 0

5. DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ (O, i, j)

Distance AB	**AB = racine((xB - xA)² + (yB - yA)²)**
Milieu I de AB	**xI = (xA + xB) / 2 yI = (yA + yB) / 2**
Vecteur AB	**AB = (xB - xA ; yB - yA)**
Produit scalaire	**AB · AC = (xB-xA)(xC-xA) + (yB-yA)(yC-yA)**

6. MÉTHODE & PIÈGES À ÉVITER

RÉFLEXE POUR CHAQUE EXO

1. **Données ?** Coordonnées → formule coords Norme/longueur → formule normes ou Al-Kashi Angle → définition cos 2. **Orthogonalité ?** Poser u·v = 0 et résoudre 3. **Angle entre droites ?** cos θ = |u·v| / (||u||·||v||) 4. **Vérif signe :** résultat cohérent avec θ (aigu/obtus) ?

PIÈGES FRÉQUENTS

• **Angle vecteurs ≠ angle droites** → prendre |cos θ| si besoin • $||u||^2 = u \cdot u$, pas $(u \cdot v)^2$ • u·v = 0 <=> perpendiculaires, mais vérifier u ≠ 0 et v ≠ 0 ! • Formule coords : bien **soustraire les coordonnées de l'origine**

7. RÉCAP — QUELLE FORMULE CHOISIR ?

Situation	Formule à utiliser
Vecteurs en coordonnées	**u·v = xu xv + yu yv**
Longueurs + angle connu	**u·v = ||u|| ||v|| cos θ**
Longueurs connues (triangle)	**u·v = ½(||u||²+||v||²-||u-v||²)**
Prouver perpendiculaires	**Calculer u·v et vérifier = 0**
Trouver un angle	**cos θ = u·v / (||u|| × ||v||)**

© mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision
Géométrie repérée – Première spécialité maths

1. Coordonnées essentielles

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Milieu de $[AB]$:

$$\boxed{I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

2. Produit scalaire

Avec un angle θ :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\theta)}$$

En repère orthonormé, si $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Norme :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

Exemple rapide

$\vec{u}(3; -2)$ et $\vec{v}(4; 6)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3. Orthogonalité

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Donc en coordonnées :

$$\boxed{xx' + yy' = 0}$$

Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, on calcule le produit scalaire de deux vecteurs directeurs.

4. Calculer un angle

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}}$$

Puis on utilise $\cos^{-1}$ à la calculatrice.

5. Identités utiles

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

Formule d'Al-Kashi :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC})}$$

À retenir

Le produit scalaire sert surtout à : démontrer une orthogonalité, calculer un angle, calculer une longueur ou résoudre un problème géométrique.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision
Géométrie repérée – Première spécialité maths

6. Droite et vecteur normal

Une droite d'équation :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

a pour vecteur normal :

$$\boxed{\vec{n}(a\,;b)}$$

et pour vecteur directeur possible :

$$\boxed{\vec{u}(-b\,;a)}$$

Droite avec un point et un normal

Si $A(x_A\,;y_A)$ et $\vec{n}(a\,;b)$ est normal à d, alors :

$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0}$$

Exemple : $A(2\,;-1)$ et $\vec{n}(3\,;4)$.

$$3(x - 2) + 4(y + 1) = 0$$

$$\boxed{3x + 4y - 2 = 0}$$

7. Projeté orthogonal

Pour $d : ax + by + c = 0$ et $M(x_M\,;y_M)$, on pose :

$$\boxed{t = \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2}}$$

Alors le projeté orthogonal H de M sur d est :

$$\boxed{H(x_M - at\ ;\ y_M - bt)}$$

8. Cercle

Cercle de centre $I(a\,;b)$ et de rayon r :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

Exemple : centre $I(3\,;-2)$, rayon 5 :

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25}$$

Reconnaître un cercle

Partir de :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

Compléter les carrés :

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Donc centre $I(3\,;-2)$ et rayon 5.

Pièges classiques

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ seulement en repère orthonormé.
- Pour $ax+by+c = 0$, le normal est $(a\,;b)$, pas $(-b\,;a)$.
- Dans $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$, le centre est $(3\,;-2)$.
- Pour prouver une perpendicularité, il faut obtenir un produit scalaire égal à 0.

Méthode à choisir

Longueur	distance / norme
Orthogonalité	produit scalaire $= 0$
Angle	formule avec cos
Droite	point + normal
Cercle	centre + rayon

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Probabilités conditionnelles

Première spé maths

1. Conditionnelle

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

2. Arbres

Nœud : branches de somme 1.
Second niveau : probabilités conditionnelles.
Chemin : produit ; plusieurs chemins : somme.

3. Probabilités totales

(A_i) partition de Ω :

$$P(B) = \sum P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Puis $P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$.

4. Indépendance

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
$\iff P_A(B) = P(B)$ $(P(A) \neq 0)$.
A, B indépendants $\Rightarrow$ $\overline{A}$, B aussi.

5. Épreuves indépendantes

Mêmes branches au second niveau, ou tableau à double entrée.
Avec remise : indépendantes ; sans remise : non.

6. Bernoulli ($n \leq 4$)

Succès p, échec $1 - p$.
Chemin à k succès : $p^k(1-p)^{n-k}$.
Compter les chemins sur l'arbre.
Au moins un succès : $1 - (1-p)^n$.

7. Monte-Carlo

Points au hasard dans $[0\,;1]^2$; proportion avec $x^2 + y^2 \leq 1$ proche de $\frac{\pi}{4}$.

Pièges

- $P_A(B) \neq P_B(A)$;
- indépendants $\neq$ incompatibles ;
- partition obligatoire ;
- plusieurs chemins pour k succès.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision
Variables aléatoires – Première spécialité maths

Objectif : trouver la loi de X, puis calculer espérance, variance et écart type.

À retenir en une phrase

Une variable aléatoire X transforme une issue au hasard en un nombre ; sa loi donne les valeurs possibles et leurs probabilités.

1. Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle est une fonction :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Elle associe un nombre à chaque issue de l'univers Ω.
Exemples : gain, perte, score, nombre de succès.

2. Loi de probabilité

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_n$:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Toujours vérifier :

$$\boxed{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1}$$

3. Notations

$\{X = a\}$: événement "X vaut a"

$P(X = a)$: probabilité que $X = a$

$\{X \leq a\}$: événement "X vaut au plus a"

Pour calculer $P(X \leq a)$, on additionne les probabilités des valeurs de X inférieures ou égales à a.

4. Méthode : loi de X

1. Identifier les issues de l'expérience.
2. Définir ce que représente X.
3. Lister les valeurs possibles de X.
4. Regrouper les issues donnant la même valeur.
5. Calculer chaque probabilité.
6. Vérifier que la somme vaut 1.

5. Espérance

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(X = x_i)}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n.$$

Interprétation : valeur moyenne théorique sur un très grand nombre de répétitions.

6. Jeu équitable

Si X est le gain du joueur :

- $\mathbb{E}(X) > 0$: jeu favorable ;
- $\mathbb{E}(X) < 0$: jeu défavorable ;
- $\mathbb{E}(X) = 0$: jeu équitable.

7. Linéarité

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b}$$

Exemple : si $Y = 2X - 3$, alors :

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) - 3.$$

8. Variance et écart type

Variance :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \sum (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i}$$

Écart type :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$$

La variance mesure la dispersion. L'écart type est dans la même unité que X.

9. König-Huygens

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

avec :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i.$$

Très utile pour aller plus vite.

Pièges fréquents

- Ne pas regrouper les issues donnant la même valeur.
- Oublier de vérifier que les probabilités totalisent 1.
- Confondre $\mathbb{E}(X^2)$ et $(\mathbb{E}(X))^2$.
- Croire que l'espérance est forcément une valeur possible.
- Oublier la racine carrée pour l'écart type.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exemple complet

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 6, on gagne 4 euros. Si le résultat est 4 ou 5, on gagne 1 euro. Sinon, on perd 2 euros. On note X le gain.

x_i	-2	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

x_i	-2	1	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = (-2) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Le jeu est donc équitable.
Variance avec König-Huygens :

$$\mathbb{E}(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 5.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 5 - 0^2 = 5.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2,24.$$

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Variables aléatoires – méthodes rapides

Calculer $P(X \leq a)$

On additionne les probabilités des valeurs qui vérifient la condition.
Exemple avec la loi précédente :

$$P(X \leq 1) = P(X = -2) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Lire une espérance

L'espérance est une moyenne théorique.
Exemple : $\mathbb{E}(X) = 1,5$ signifie qu'en moyenne, sur un très grand nombre de répétitions, on gagne environ $1,50$ euro par partie.

Choisir la bonne formule de variance

Formule directe :

$$\mathbb{V}(X) = \sum (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i.$$

Elle est pratique si $\mathbb{E}(X) = 0$.
Formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Elle est souvent plus rapide dans les calculs.

Méthode d'exercice type

1. Faire le tableau de loi.
2. Vérifier la somme des probabilités.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
5. En déduire $\mathbb{V}(X)$ avec König-Huygens.
6. Calculer $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
7. Conclure avec les mots du problème.

Phrase utile en copie

« La variable aléatoire X prend les valeurs ..., avec les probabilités ..., donc sa loi est donnée par le tableau suivant. »

À ne pas écrire

Ne pas écrire seulement un résultat numérique sans contexte. Une réponse complète explique ce que représente X, puis interprète $\mathbb{E}(X)$ ou $\sigma(X)$ dans la situation.

Mini résumé

$$\boxed{\text{Loi} \Rightarrow \mathbb{E}(X) \Rightarrow \mathbb{V}(X) \Rightarrow \sigma(X)}$$

La loi est le point de départ de presque tous les exercices.

Simulation

Pour estimer $\mathbb{E}(X)$:

1. simuler beaucoup de valeurs de X ;
2. calculer leur moyenne ;
3. comparer cette moyenne à l'espérance théorique.

Plus le nombre de simulations est grand, plus la moyenne observée tend à être proche de l'espérance.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision
Échantillonnage – Première spécialité maths

Idée du chapitre

Un **échantillon** sert à observer plusieurs réalisations d'une même variable aléatoire. On calcule une **moyenne observée** m pour estimer l'espérance théorique $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Vocabulaire

X	variable aléatoire étudiée
μ	espérance de X : $\mu = \mathbb{E}(X)$
σ	écart type de X
n	taille d'un échantillon
m	moyenne observée de l'échantillon
N	nombre d'échantillons simulés

Formule de la moyenne

Pour un échantillon :

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

la moyenne observée est :

$$\boxed{m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}$$

Fluctuation

Deux échantillons de même taille ne donnent pas forcément la même moyenne.
C'est la **fluctuation d'échantillonnage**.

Comparaison importante

On étudie l'écart :

$$\boxed{|m - \mu|}$$

On le compare souvent à :

$$\boxed{\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Donc on vérifie si :

$$\boxed{|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Interpréter

- Si l'écart est petit : m est proche de μ.
- Si l'écart est grand : l'échantillon semble éloigné du modèle.
- Plus n est grand, plus $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ est petit.

Attention

$m \neq \mu$ ne veut pas dire que le modèle est faux. La moyenne observée varie naturellement à cause du hasard.

Méthode type

Pour comparer une moyenne observée à une espérance :

1. Identifier X, son espérance μ et son écart type σ.
2. Identifier la taille de l'échantillon n.
3. Calculer la moyenne observée m.
4. Calculer $|m - \mu|$.
5. Calculer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
6. Comparer et conclure avec prudence.

Exemple corrigé

On lance un dé équilibré. On note X le résultat. On a :

$$\mu = 3,5 \qquad \text{et} \qquad \sigma \approx 1,71.$$

On effectue $n = 100$ lancers et on obtient :

$$m = 3,62.$$

Alors :

$$|m - \mu| = |3,62 - 3,5| = 0,12.$$

Et :

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \times 1,71}{\sqrt{100}} = \frac{3,42}{10} = 0,342.$$

Comme :

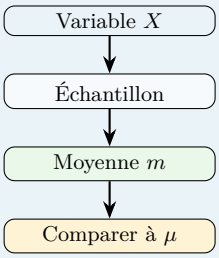
$$0,12 \leq 0,342,$$

la moyenne observée est compatible avec le modèle du dé équilibré.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Échantillonnage – méthodes et pièges

Schéma à retenir



Quand n augmente

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{diminue.}$$

Donc les moyennes d'échantillons sont généralement plus proches de μ.

Simulation Python

```
from random import randint

def moyenne_de(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + randint(1, 6)
    return s / n
```

Ce programme simule n lancers de dé et renvoie leur moyenne.

Simuler plusieurs échantillons

```
for k in range(10):
    print(moyenne_de(100))
```

Les moyennes affichées changent : c'est la fluctuation d'échantillonnage.

Pièges classiques

- Confondre n et N : n est la taille d'un échantillon, N le nombre d'échantillons simulés.
- Confondre m et μ : m est observée, μ est théorique.
- Oublier la racine carrée dans $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Conclure trop vite que le modèle est faux.

Phrase de conclusion

On écrit plutôt :

- « La moyenne observée est compatible avec le modèle. »
- « L'écart observé semble important par rapport à la fluctuation attendue. »

À savoir faire

- Calculer une moyenne d'échantillon.
- Simuler un échantillon avec Python.
- Simuler plusieurs échantillons.
- Comparer $|m-\mu|$ et $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Interpréter le résultat sans affirmation excessive.

Résumé express

$$\boxed{m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}} \qquad \boxed{|m-\mu|} \qquad \boxed{\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Une moyenne observée varie d'un échantillon à l'autre, mais elle se rapproche généralement de l'espérance quand la taille n de l'échantillon augmente.

mathlvl.fr – Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Algorithmique et Python

Première spé maths

1. Générer

`[2, 3, 5]` ; `append` dans une boucle ; `[f(k) for k in … if …]`

2. Manipuler

`L[i]`, `L[-1]`, `len`, `append`, `remove`, `del`

3. Parcourir

`for x in L` ; `for i in range(len(L))`

4. Suites

boucle `for` (terme, somme) ; `while` (seuil)

5. Newton

$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

6. Euler

$y \leftarrow y + h\,y'$

Pièges

- Oublier que les indices commencent à 0 : le dernier élément est `L[len(L) - 1]`, soit `L[-1]`.
- Utiliser `/` au lieu de `//` pour une division entière (Syracuse).
- Placer `return` à l'intérieur de la boucle.
- Confondre la condition d'arrêt d'une boucle `while` et la condition qu'on cherche : on boucle **tant que** le seuil n'est pas dépassé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

FICHE DE RÉVISION

Fonction exponentielle

Première spé maths

1. Définition

Unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Notée exp ; $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718$.

2. Règles de calcul

$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $\qquad$ $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

$\mathrm{e}^0 = 1$.

3. Signe et variations

$\mathrm{e}^x > 0$ pour tout x.
$\exp' = \exp > 0$: strictement croissante.
$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$; $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.

4. Courbe

Passe par $(0\,;1)$ et $(1\,;\mathrm{e})$.
Tangente en 0 : $y = x + 1$.
$\mathrm{e}^x \geq x + 1$ pour tout x.

5. Dérivées

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$; $(\mathrm{e}^{at})' = a\,\mathrm{e}^{at}$.
$(x\mathrm{e}^x)' = (x+1)\mathrm{e}^x$.
Étude : factoriser par $\mathrm{e}^x > 0$, le signe vient de l'autre facteur.

6. Modèles

$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{at}$: $N' = aN$.
$a > 0$: croissance ; $a < 0$: décroissance.
$u_n = \mathrm{e}^{na}$: suite géométrique de raison e^a.

7. Euler

$f(x+h) \approx (1+h)f(x)$, donc $\mathrm{e}^{nh} \approx (1+h)^n$.
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$: 2,594 ; 2,705 ; 2,717…

Pièges

- $\mathrm{e}^{x+y} \neq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y$;
- $\mathrm{e}^{2x} \neq 2\mathrm{e}^x$;
- $(\mathrm{e}^{-3t})' = -3\mathrm{e}^{-3t}$;
- $\mathrm{e}^x = -2$: aucune solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).