MathLvl

Fiches de révision de maths

Prépa MP / MPI (2e année)

26 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Structures algébriques p. 2
2. Polynômes p. 4
3. Réduction des endomorphismes p. 6
4. Diagonalisation p. 8
5. Trigonalisation p. 10
6. Espaces euclidiens p. 12
7. Théorème spectral p. 14
8. Espaces vectoriels normés p. 16
9. Suites, limites, continuité p. 18
10. Compacité p. 20
11. Connexité par arcs p. 22
12. Séries numériques p. 24
13. Séries vectorielles p. 26
14. Suites et séries de fonctions p. 28
15. Séries entières p. 30
16. Fonctions vectorielles p. 32
17. Intégrales généralisées p. 34
18. Intégrales à paramètre p. 36
19. Équations différentielles linéaires p. 38
20. Calcul différentiel p. 40
21. Optimisation p. 42
22. Variables aléatoires discrètes p. 44
23. Lois discrètes p. 46
24. Espérance et variance p. 48
25. Séries génératrices p. 50
26. Loi faible des grands nombres p. 52

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Fiche de révision

Structures algébriques — Prépa MP/MPI 2e année

Groupes, anneaux, corps, $\mathbb{K}[X]$, polynômes d'endomorphismes

1. Groupes

Sous-groupe. $H \leq G$ si $H \neq \varnothing$ et $xy^{-1} \in H$ pour tous $x, y \in H$. Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.
Sous-groupe engendré. $\langle A \rangle$ est le plus petit sous-groupe contenant A.
Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Ce sont exactement les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
Monogène/cyclique. $G = \langle a \rangle$. Fini $\Rightarrow$ cyclique. $\mathbb{U}_n = \langle e^{2i\pi/n} \rangle$.
Ordre. Si x est d'ordre d, alors $x^m = e \iff d \mid m$. Dans un groupe fini, $\mathrm{ord}(x) \mid |G|$.
Dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$:

$$\mathrm{ord}(\overline{k}) = \frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}.$$

$\overline{k}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \mathrm{pgcd}(k,n) = 1$.

2. Anneaux et idéaux

Anneaux unitaires. Dans un produit $A_1 \times \cdots \times A_r$, opérations composante par composante et

$$(a_1, \ldots, a_r) \in (A_1 \times \cdots \times A_r)^\times \iff a_i \in A_i^\times \ \forall i.$$

Idéal. Dans un anneau commutatif A, I est un idéal si I est sous-groupe de $(A, +)$ et $aI \subset I$ pour tout $a \in A$.
Noyau. Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, $\ker f$ est un idéal.
Principal. $xA = \{xa : a \in A\}$.
Divisibilité/idéal. Dans un anneau intègre :

$$a \mid b \iff bA \subset aA.$$

Attention : inclusion inversée.

3. $\mathbb{Z}$, PGCD, Bézout

Tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$.
Pour $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$, non tous nuls :

$$a_1\mathbb{Z} + \cdots + a_r\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}, \quad d = \mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_r) > 0.$$

Bézout. Il existe $u_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$d = u_1 a_1 + \cdots + u_r a_r.$$

En particulier,

$$\mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1.$$

Inverse modulo n. Si $au + nv = 1$, alors $\overline{a}^{-1} = \overline{u}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{ab}$.
Inversibles.

$$\overline{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \iff \mathrm{pgcd}(a,n) = 1.$$

Corps.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est un corps} \iff n \text{ est premier.}$$

Notation : $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Équation linéaire. $ax \equiv b \pmod n$ a des solutions ssi $\mathrm{pgcd}(a,n) \mid b$. Si $g = \mathrm{pgcd}(a,n)$, on réduit modulo n/g.
Théorème chinois. Si $m \wedge n = 1$,

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Même chose pour plusieurs modules deux à deux premiers entre eux.
Euler. Si $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, alors

$$\varphi(n) = n \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \quad \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1).$$

Si $a \wedge n = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$. Fermat : $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ si $p \nmid a$.

5. Anneau $\mathbb{K}[X]$

Cadre : $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux :

$$I = D\mathbb{K}[X]$$

avec D unitaire si $I \neq \{0\}$.
PGCD. Pour P_i non tous nuls :

$$P_1\mathbb{K}[X] + \cdots + P_r\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X],$$
$$D = \mathrm{pgcd}(P_1, \ldots, P_r) \text{ unitaire.}$$

Bézout.

$$D = U_1P_1 + \cdots + U_rP_r.$$

P, Q premiers entre eux $\iff \exists U, V,\ UP + VQ = 1$.
Irréductibles. Décomposition unique en facteurs irréductibles unitaires.
Dans $\mathbb{C}[X]$: irréductibles = degré 1. Dans $\mathbb{R}[X]$: degré 1 ou degré 2 à discriminant < 0.

6. Algèbres

Une $\mathbb{K}$-algèbre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une multiplication compatible et d'une unité.
Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $M_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Contient 1, stable par combinaisons linéaires et par produit.
Morphisme. Linéaire, multiplicatif, préserve l'unité.

7. Polynômes d'endomorphismes

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum a_k X^k$,

$$P(u) = \sum a_k u^k, \quad u^0 = \mathrm{Id}_E\,.$$

Morphisme d'algèbres.

$$\mathrm{ev}_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E), \quad P \mapsto P(u).$$

Son noyau est l'idéal annulateur $\mathcal{I}_u$. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$.
Si $\dim E < \infty$,

$$\mathcal{I}_u = \mu_u\mathbb{K}[X]$$

où μ_u est le polynôme minimal unitaire.
Si $d = \deg \mu_u$, alors

$$(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{d-1}) \text{ est une base de } \mathbb{K}[u].$$

Si $P(u) = 0$ et λ valeur propre, alors $P(\lambda) = 0$. Les racines de μ_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Noyaux et réduction

Lemme des noyaux. Si $P_1, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 \cdots P_r$, alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u).$$

Diagonalisation.

$$u \text{ diagonalisable} \iff \mu_u \text{ scindé à racines simples}$$

$\iff$ u annule un polynôme scindé à racines simples.

Trigonalisation.

$$u \text{ trigonalisable} \iff \mu_u \text{ scindé}$$

$\iff$ u annule un polynôme scindé.

Exemples minute

— Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\operatorname{ord}(\overline{4}) = 12/4 = 3$.
— $\overline{7}^{-1} = \overline{15}$ dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, car $7 \cdot 15 = 105 \equiv 1$.
— $\varphi(360) = 360(1-1/2)(1-1/3)(1-1/5) = 96$.
— Si $p^2 = p$, alors $\mu_p \mid X(X-1)$. Si $p \neq 0, \mathrm{Id}$, $\mu_p = X(X-1)$.
— Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mu_A = (X-1)^2$: trigonalisable, non diagonalisable.

Pièges à éviter

— Ne pas diviser une congruence par un élément non inversible.
— $a \mid b \Rightarrow bA \subset aA$, pas l'inverse.
— Le PGCD dans $\mathbb{K}[X]$ est unitaire.
— Un polynôme annulateur à racines simples suffit pour diagonaliser ; un annulateur à racines multiples ne suffit pas pour conclure non diagonalisable.
— $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutative, mais $\mathbb{K}[u]$ l'est.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Polynômes

Prépa MP / MPI — 2e année

1. Anneau $\mathbb{K}[X]$

— $\mathbb{K}$ est un corps : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
— Si $P, Q \neq 0$, alors $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
— $\mathbb{K}[X]$ est intègre : $PQ = 0 \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$.
— Les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes non nulles.
— Deux polynômes sont associés s'ils diffèrent d'un facteur constant non nul.

2. Division euclidienne

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) tel que

$$A = BQ + R, \qquad \deg R < \deg B.$$

Le reste modulo $X - a$ est $P(a)$. Donc

$$X - a \mid P \iff P(a) = 0.$$

3. Idéaux et divisibilité

$$(D) = D\mathbb{K}[X] = \{DQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux.

$$B \mid A \iff (A) \subset (B).$$

Attention : l'inclusion est inversée par rapport à la divisibilité.

4. PGCD et Bézout

Pour A, B non tous deux nuls, $\operatorname{pgcd}(A, B)$ est choisi unitaire.

$$(A) + (B) = (\operatorname{pgcd}(A, B)).$$

Donc il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AU + BV = \operatorname{pgcd}(A, B).$$

En particulier :

$$\operatorname{pgcd}(A, B) = 1 \iff \exists U, V,\ AU + BV = 1.$$

Méthode. Pour calculer le PGCD : divisions euclidiennes successives ; le dernier reste non nul, rendu unitaire, est le PGCD. Remonter les égalités donne Bézout.

5. Gauss et PPCM

Théorème de Gauss.

$$A \mid BC \text{ et } \operatorname{pgcd}(A, B) = 1 \Longrightarrow A \mid C.$$

Si A et B sont premiers entre eux :

$$A \mid C \text{ et } B \mid C \iff AB \mid C.$$

Pour $A, B \neq 0$:

$$(A) \cap (B) = (\operatorname{ppcm}(A, B)).$$

Si A, B sont unitaires et premiers entre eux, $\operatorname{ppcm}(A, B) = AB$.

6. Congruences

$$A \equiv B \pmod{M} \iff M \mid A - B.$$

Toute classe modulo M possède un unique représentant de degré $< \deg M$.

Inverse modulo M.

$$\overline{A} \in \mathbb{K}[X]/(M) \text{ est inversible} \iff \operatorname{pgcd}(A, M) = 1.$$

Si $AU + MV = 1$, alors $\overline{A}^{-1} = \overline{U}$.

Exemple. Modulo $X^2 + 1$, $X^2 \equiv -1$, donc

$$(X + 1)\frac{1 - X}{2} \equiv 1.$$

Ainsi $(X + 1)^{-1} \equiv \frac{1-X}{2}$.

7. Théorème chinois

Si $M_1, \ldots, M_r$ sont deux à deux premiers entre eux et $M = M_1 \cdots M_r$, alors

$$\mathbb{K}[X]/(M) \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{K}[X]/(M_i).$$

Il permet de résoudre simultanément des congruences modulo des polynômes premiers entre eux.

Exemple. Chercher P tel que $P(1) = 2$, $P(-1) = 3$. Avec $P = aX + b$:

$$a + b = 2, \quad -a + b = 3, \quad P = \frac{5 - X}{2}.$$

8. Irréductibilité

$P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les constantes non nulles et les associés de P.

— Degré 1 : toujours irréductible.
— Degré 2 ou 3 : réductible $\iff$ possède une racine dans $\mathbb{K}$.
— Degré $\geqslant 4$: l'absence de racine ne suffit pas.

$$\mathbb{K}[X]/(P) \text{ est un corps} \iff P \text{ est irréductible.}$$

Sur $\mathbb{C}$. Les irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1.

Sur $\mathbb{R}$. Les irréductibles sont les degrés 1 et les degrés 2 sans racine réelle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Racines et multiplicités

$$a \text{ racine de } P \iff X - a \mid P.$$

a est racine de multiplicité m si

$$(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P.$$

En caractéristique nulle :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0, \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Si $P \neq 0$, la somme des multiplicités de ses racines dans $\mathbb{K}$ est $\leqslant \deg P$. Si P est scindé, il y a égalité.

10. Pièges classiques

— Toujours préciser le corps : X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$, pas sur $\mathbb{C}$.

— Le PGCD se choisit unitaire.

— Ne pas confondre racine simple et facteur simple.

— En degré 4, « pas de racine » ne signifie pas irréductible.

— Sur un corps fini, deux fonctions polynomiales égales ne viennent pas forcément du même polynôme.

Mini-exemples à connaître

— $\text{pgcd}(X^4-1, X^3-1) = X-1$.

— Si $P(1) = P'(1) = 0$, alors $(X-1)^2 \mid P$.

— Modulo X^2+X+1, on a $X^3 \equiv 1$.

— Sur $\mathbb{C}$, $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Prépa MP / MPI (2e année)

Réduction des endomorphismes

1. Cadre et vocabulaire

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, souvent de dimension finie n, avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Valeur propre. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si

$$\exists x \neq 0, \quad u(x) = \lambda x.$$

x est un vecteur propre.

Espace propre.

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E).$$

λ est valeur propre ssi $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.

Matrice.

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n), \qquad AX = \lambda X.$$

2. Propriétés à connaître

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distinctes :

$$E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

est une somme directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si $uv = vu$, alors chaque espace propre de u est stable par v.

En dimension n, le spectre est fini et contient au plus n valeurs propres.

3. Polynôme caractéristique

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\chi_A(X) = \det(XI_n - A)}$$

Il est unitaire de degré n.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est le polynôme caractéristique d'une matrice de u dans une base : il ne dépend pas de la base.

Coefficients utiles :

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

En taille 2 :

$$\boxed{\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A).}$$

Si A est triangulaire de diagonale $a_1, \dots, a_n$:

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i).$$

4. Valeurs propres = racines

$$\boxed{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0.}$$

Même chose pour un endomorphisme en dimension finie.

Attention au corps. Sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$: aucune valeur propre réelle. Sur $\mathbb{C}$: valeurs propres i et $-i$.

5. Multiplicités

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$.

Multiplicité algébrique : multiplicité m_λ de λ comme racine de χ_u.

Multiplicité géométrique :

$$g_\lambda = \dim E_\lambda(u).$$

Inégalité fondamentale :

$$\boxed{1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda.}$$

Si $\dim E_\lambda < m_\lambda$, la valeur propre ne fournit pas assez de vecteurs propres.

6. Méthode standard

Pour étudier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. Calculer $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
2. Factoriser dans $\mathbb{K}[X]$.
3. Les racines sont les valeurs propres.
4. Pour chaque λ, résoudre
$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$
5. Comparer $\dim E_\lambda$ et m_λ.
6. Si l'on a n vecteurs propres indépendants, construire P avec ces vecteurs en colonnes.

7. Diagonalisation

u est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

A est diagonalisable s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Critères équivalents :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

ou

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n.$$

Avec le polynôme caractéristique :

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda, \dim E_\lambda = m_\lambda.}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Critères rapides

Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
La réciproque est fausse : Id_E est diagonalisable, mais

$$\chi_{\mathrm{Id}_E}(X) = (X-1)^n.$$

9. Projecteurs et symétries

Projecteur : si $p^2 = p$, alors p est diagonalisable et

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{Id}_E).$$

Valeurs propres possibles : $0, 1$.
Symétrie : si $s^2 = \mathrm{Id}_E$, alors s est diagonalisable et

$$E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$

Valeurs propres possibles : $1, -1$.

10. Trigonalisation

u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

$$\boxed{u \text{ trigonalisable sur } \mathbb{K} \iff \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K}.}$$

Si u est trigonalisable, alors les valeurs propres, avec multiplicité, sont les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire de u.
Donc

$$\operatorname{tr}(u) = \sum \lambda_i, \qquad \det(u) = \prod \lambda_i.$$

11. Pièges fréquents

- Le vecteur propre doit être non nul.
- χ_A scindé ne suffit pas pour diagonaliser.
- Toujours préciser le corps : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Ne pas confondre m_λ et $\dim E_\lambda$.
- Dans $A = PDP^{-1}$, l'ordre des colonnes de P doit correspondre à l'ordre des valeurs propres dans D.

12. Contrôles de calcul

Après avoir obtenu χ_A :
- coefficient de X^{n-1} : $-\operatorname{tr}(A)$;
- terme constant : $(-1)^n \det(A)$;
- matrice triangulaire : racines = diagonale ;
- diagonalisation : vérifier $AP = PD$.

13. Exemple type

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1).$$

Pour $\lambda = 3$:

$$E_3(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 1$:

$$E_1(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc A est diagonalisable et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

14. Exemple non diagonalisable

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(X) = (X-1)^2.$$

Mais

$$B - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\dim E_1(B) = 1 < 2$: B n'est pas diagonalisable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Prépa MP / MPI (2e année)

Diagonalisation

1. Définition

$u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{ou} \quad A = PDP^{-1}.$$

Les colonnes de P sont des vecteurs propres. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres dans le même ordre.

2. Critère par les espaces propres

Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Pour $\dim E = n$:

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)}$$

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n.}$$

Avec

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E), \qquad E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

3. Critère par χ_u

Soit m_λ la multiplicité de λ dans χ_u. Toujours :

$$1 \le \dim E_\lambda(u) \le m_\lambda.$$

Critère :

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff \begin{cases} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}, \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim E_\lambda = m_\lambda. \end{cases}}$$

Cas rapide : si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.
Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

4. Méthode pratique

Pour diagonaliser A :

1. calculer $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$;
2. factoriser sur le corps $\mathbb{K}$;
3. calculer chaque $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$;
4. vérifier que la somme des dimensions vaut n ;
5. mettre une base de chaque E_λ en colonnes dans P ;
6. construire D avec les valeurs propres dans le même ordre.

Alors $P^{-1}AP = D$.

5. Polynôme annulateur

Pour $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$:

$$P(u) = a_0 \,\mathrm{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_m u^m.$$

P est **annulateur** de u si $P(u) = 0$.
Si $P(u) = 0$ et si λ est valeur propre de u, alors

$$P(\lambda) = 0.$$

Donc les valeurs propres sont parmi les racines de tout polynôme annulateur.
Exemples :

$$p^2 = p \Rightarrow X(X-1) \text{ annule } p,$$

$$s^2 = \mathrm{Id} \Rightarrow (X-1)(X+1) \text{ annule } s.$$

6. Lemme des noyaux

Si $P_1, \dots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et

$$P = P_1 \cdots P_r,$$

alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u)).}$$

En particulier, si $P(u) = 0$ et si $P = P_1 \cdots P_r$ avec les P_i premiers entre eux, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

7. Critère par annulateur

Un polynôme est **simplement scindé** s'il est produit de facteurs linéaires distincts :

$$P(X) = c \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i), \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Critère fondamental :

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff u \text{ admet un annulateur simplement scindé}}$$

Équivalent avec le polynôme minimal :

$$\boxed{u \text{ diag.} \iff \pi_u \text{ est simplement scindé.}}$$

8. Exemples à reconnaître

Si

$$A^2 - 3A + 2I = 0,$$

alors $(X-1)(X-2)$ annule A, donc A est diagonalisable.
Si

$$(A - I)^2 = 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

avec $A \neq I$, le polynôme annulateur connu a une racine double : cela ne prouve pas la diagonalisabilité. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.
Projecteur : diagonalisable, valeurs propres possibles $0, 1$.
Symétrie : diagonalisable, valeurs propres possibles $1, -1$.

9. Pièges fréquents

- χ_A scindé ne suffit pas pour diagonaliser.
- Un polynôme annulateur scindé ne suffit pas : il doit être à racines simples.
- Le corps compte : diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ne signifie pas forcément diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- Dans $P^{-1}AP = D$, l'ordre des colonnes de P impose l'ordre des coefficients diagonaux de D.

10. Formule utile

Si $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}.}$$

Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Trigonalisation

Trigonalisation des endomorphismes et sous-espaces caractéristiques

1. Définitions essentielles

$u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$.

- u est **trigonalisable sur** $\mathbb{K}$ s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
- Matrice triangulaire : les valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

Si T est triangulaire supérieure de diagonale $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i \alpha_i, \qquad \det(T) = \prod_i \alpha_i.$$

2. Critère fondamental

$$\boxed{u \text{ trigonalisable sur } \mathbb{K} \iff \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K}}$$

Matriciellement :

$$A \text{ trigonalisable sur } \mathbb{K} \iff \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.$$

Conséquences.

- Sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme de dimension finie est trigonalisable.
- Sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier que χ_A n'a pas de facteur quadratique irréductible.
- Diagonalisable $\Rightarrow$ trigonalisable, mais pas réciproquement.

3. Méthode express

Pour tester $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. calculer $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$;
2. factoriser sur le corps imposé $\mathbb{K}$;
3. conclure : scindé $\Rightarrow$ trigonalisable ; non scindé $\Rightarrow$ non trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

Pour construire une base trigonalisante : chercher un drapeau stable

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E, \quad \dim F_k = k.$$

Une base adaptée à ce drapeau donne une matrice triangulaire supérieure.

4. Polynômes annulateurs

$P \in \mathbb{K}[X]$ annule u si $P(u) = 0$.

- Si $P(u) = 0$, toute valeur propre de u est racine de P.
- Si u annule un polynôme **scindé**, alors u est trigonalisable.
- Si u annule un polynôme **scindé à racines simples**, alors u est diagonalisable.
- Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.

À retenir : racines multiples possibles $\Rightarrow$ trigonalisation possible, diagonalisation pas garantie.

5. Lemme des noyaux

Si $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont deux à deux premiers entre eux, alors

$$\mathrm{Ker}\big((P_1 \cdots P_r)(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

Cas typique : si

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{a_i}$$

avec λ_i distincts et $P(u) = 0$, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{a_i}\big).$$

6. Sous-espaces caractéristiques

Si

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

est scindé, on définit

$$E_{\lambda_i}^{\mathrm{car}}(u) = \mathrm{Ker}\big((u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}\big).$$

Alors

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}^{\mathrm{car}}(u)}, \qquad \dim E_{\lambda_i}^{\mathrm{car}} = m_i.$$

Chaque $E_{\lambda_i}^{\mathrm{car}}$ est stable par u et

$$u_{|E_\lambda^{\mathrm{car}}} = \lambda \,\mathrm{Id} + N_\lambda, \quad N_\lambda \text{ nilpotent.}$$

7. Espace propre vs caractéristique

Toujours :

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}) \subset E_\lambda^{\mathrm{car}}(u).$$

Si χ_u est scindé, alors

$$u \text{ diagonalisable} \iff \forall \lambda,\ E_\lambda(u) = E_\lambda^{\mathrm{car}}(u)$$

$$\iff \forall \lambda, \dim E_\lambda(u) = m_\lambda.$$

La différence entre les deux espaces mesure la partie nilpotente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Nilpotents

N est nilpotent s'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

— Seule valeur propre possible : 0.

— $\chi_N(X) = X^n$.

— N est trigonalisable, avec une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Dans un bloc caractéristique :

$$u = \lambda \mathrm{Id} + N, \quad N \text{ nilpotent.}$$

9. Exemples rapides

Non diagonalisable mais trigonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_A = (X-1)^2.$$

χ_A est scindé, donc A est trigonalisable. Mais $\dim E_1 = 1 < 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

Dépend du corps :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_R = X^2 + 1.$$

Non trigonalisable sur $\mathbb{R}$, trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

10. Pièges à éviter

— Oublier de préciser le corps de travail.

— Confondre χ_A scindé et A diagonalisable.

— Utiliser un polynôme annulateur non scindé pour conclure à tort.

— Croire que $E_\lambda = E_\lambda^{\mathrm{car}}$ automatiquement.

— Employer $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour la trigonalisation : cette condition concerne la diagonalisation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Espaces euclidiens

Prépa MP / MPI – 2e année

Cadre

E est un espace euclidien réel de dimension finie, produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. En base orthonormée :

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY.$$

Si F est un sous-espace : $E = F \oplus F^\perp$.

Formes linéaires

Toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique

$$\varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

avec $a \in E$. C'est le point de départ de l'existence de l'adjoint.

Adjoint

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'adjoint u^* est défini par

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

En base orthonormée :

$$\mathrm{Mat}(u^*) = {}^tA.$$

Règles :

$$(u+v)^* = u^* + v^*, \quad (\lambda u)^* = \lambda u^*,$$

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*, \quad (u^*)^* = u.$$

Si u est inversible : $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

$$\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp, \qquad \mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp.$$

Si F stable par u, alors $F^\perp$ stable par u^*.

Matrices orthogonales

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque

$${}^tAA = I_n.$$

Équivalences :
— colonnes orthonormées ;
— lignes orthonormées ;
— $A^{-1} = {}^tA$;
— matrice de passage entre bases orthonormées.
Conséquence : $\det A = \pm 1$.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \mid {}^tAA = I_n\}.$$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Isométries vectorielles

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\| .$$

Critères équivalents :
— u conserve le produit scalaire ;
— l'image d'une base orthonormée est orthonormée ;
— $u^*u = \mathrm{Id}$;
— u inversible et $u^* = u^{-1}$;
— en base orthonormée, $\mathrm{Mat}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.
Déterminant : $\det u = \pm 1$; directe si $\det u = 1$, indirecte si $\det u = -1$.

Dimension 2

Dans un plan euclidien orienté :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ce sont les rotations vectorielles. Les isométries indirectes sont les réflexions :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Réduction des isométries

Si $u \in O(E)$ et F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u. Dans une base orthonormée adaptée, une isométrie a des blocs :

$$(1), \quad (-1), \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En dimension 3, une isométrie directe est une rotation autour d'un axe, avec matrice possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Autoadjoints

u est autoadjoint si $u^* = u$, c'est-à-dire

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

En base orthonormée : A symétrique, $A = {}^tA$. Si u autoadjoint et F stable par u, alors $F^\perp$ stable par u.
Un projecteur p est orthogonal si et seulement si

$$p^2 = p \quad \text{et} \quad p = p^*.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Théorème spectral

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$u \text{ autoadjoint} \iff E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u).$$

Équivalent : il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u. Version matricielle :

$$A \in S_n(\mathbb{R}) \iff \exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists D \text{ diagonale}$$

$$\text{tel que } A = PD{}^tP.$$

Si $\lambda \neq \mu$, alors $E_\lambda \perp E_\mu$.

Positivité

Pour $u \in \mathcal{S}(E)$:

$$u \geq 0 \iff \forall x,\ \langle u(x), x\rangle \geq 0.$$

$$u > 0 \iff \forall x \neq 0,\ \langle u(x), x\rangle > 0.$$

Caractérisation spectrale :

— $u \geq 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres sont ≥ 0 ;

— $u > 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres sont > 0.

Pour une matrice symétrique A, remplacer $\langle u(x), x\rangle$ par ${}^tXAX$.

Méthodes rapides

Tester A orthogonale : calculer ${}^tAA$ ou vérifier colonnes orthonormées.
Tester A symétrique : vérifier $A = {}^tA$.
Diagonaliser A symétrique : valeurs propres, espaces propres, bases orthonormées, puis ${}^tPAP = D$.
Tester $A > 0$: si A symétrique, regarder les valeurs propres ou le signe de ${}^tXAX$.

Pièges fréquents

— Transposée = adjoint seulement en base orthonormée.

— Orthogonale $\neq$ symétrique.

— Symétrique $\neq$ orthogonale.

— Diagonalisable $\neq$ orthogonalement diagonalisable.

— Coefficients positifs d'une matrice $\neq$ matrice positive.

— Le cadre est réel : pas de produit scalaire hermitien ici.

Mini-exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est symétrique. Ses valeurs propres sont 1 et 3, avec vecteurs propres $(1,-1)$ et $(1,1)$. Donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $1, 3 > 0$, A est définie positive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Théorème spectral

Prépa MP / MPI – 2e année

Cadre

E est un espace euclidien réel de dimension finie. En base orthonormée, le produit scalaire usuel vérifie

$$\langle x, y\rangle = {}^tXY.$$

Autoadjoint / symétrique

Un endomorphisme u est autoadjoint si

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle .$$

Dans une base orthonormée :

$$u \text{ autoadjoint} \iff A = {}^tA.$$

Orthogonalité des espaces propres

Si u est autoadjoint et si $\lambda \neq \mu$, alors

$$E_\lambda(u) \perp E_\mu(u).$$

Preuve éclair : pour $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$,

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu \langle x, y\rangle .$$

Méthode type

Diagonaliser orthogonalement $A = {}^tA$

1. Calculer $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.
2. Trouver les valeurs propres λ.
3. Résoudre $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
4. Dans chaque espace propre : prendre une base orthonormée.
5. Mettre ces vecteurs en colonnes dans Q.
6. Écrire D dans le même ordre que les colonnes de Q.

Si multiplicité > 1

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont déjà orthogonaux. Mais à l'intérieur d'un même espace propre de dimension > 1, il faut parfois orthonormaliser la base choisie.

Théorème spectral

Forme géométrique

Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien réel possède une base orthonormée de vecteurs propres.

Forme matricielle

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors il existe Q orthogonale et D diagonale réelle telles que

$${}^tQAQ = D, \qquad A = QD{}^tQ.$$

Les colonnes de Q sont des vecteurs propres orthonormés de A.

À ne pas confondre

Diagonaliser : $P^{-1}AP = D$.
Diagonaliser orthogonalement : ${}^tQAQ = D$ avec $Q^{-1} = {}^tQ$.

Décomposition spectrale

Si u est autoadjoint et si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont ses valeurs propres distinctes, alors

$$E = E_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_r}.$$

Tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_r$, avec $x_i \in E_{\lambda_i}$, et

$$u(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r.$$

Si p_i est le projecteur orthogonal sur E_{λ_i} :

$$u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i, \qquad P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) p_i.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Formes quadratiques

Soit $A = {}^tA$ et $q_A(x) = {}^txAx$. Si

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,{}^tQ$$

et $y = {}^tQx$, alors

$$q_A(x) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \qquad \|x\| = \|y\|.$$

Critère spectral de positivité

Pour A symétrique réelle :

$$A \geq 0 \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+,$$

$$A > 0 \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Autrement dit : positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont ≥ 0 ; définie positive $\Leftrightarrow$ toutes sont > 0.

Inégalités spectrales

Si $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ sont les valeurs propres extrêmes de $A = {}^tA$, alors

$$\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq {}^txAx \leq \lambda_{\max} \|x\|^2.$$

Pour $x \neq 0$:

$$\lambda_{\min} \leq \frac{{}^txAx}{{}^txx} \leq \lambda_{\max}.$$

Exemple modèle

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

on calcule

$$\chi_A(X) = (X-2)^2 - 1 = (X-3)(X-1).$$

Valeurs propres : 3 et 1.

$$E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vecteurs propres orthonormés :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$${}^tQAQ = D, \qquad A = QD\,{}^tQ.$$

Comme $1, 3 > 0$, A est définie positive, donc

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad 2x^2 + 2xy + 2y^2 > 0.$$

Réflexes d'exercice

Checklist

- Voir $A = {}^tA$: penser théorème spectral.
- Valeurs propres distinctes : espaces propres orthogonaux.
- Matrice Q : colonnes orthonormées, ordre cohérent avec D.
- Question de signe : regarder les valeurs propres.
- Puissances : $A^k = QD^k\,{}^tQ$.
- Inverse : si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, $A^{-1} = QD^{-1}\,{}^tQ$.

Erreurs fréquentes

- Oublier de normaliser les vecteurs propres.
- Dire qu'une matrice diagonalisable est forcément symétrique : faux.
- Utiliser ${}^tQAQ = D$ avec une matrice Q non orthogonale.
- Appliquer le critère spectral de positivité à une matrice non symétrique sans précaution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Espaces vectoriels normés

MP/MPI 2e année

Cadre

On travaille sur un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Hors programme dans ce chapitre : espaces métriques généraux, espaces topologiques, suites de Cauchy, espaces de Banach.

1. Norme, distance, boules

Une norme $\|\cdot\|$ vérifie :

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| .$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Distance associée : $d(x, y) = \|x - y\|$.

$$B(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}.$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leq r\}.$$

$$S(a, r) = \{x : \|x - a\| = r\}.$$

Inégalité utile : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

2. Normes usuelles

Sur $\mathbb{K}^n$:

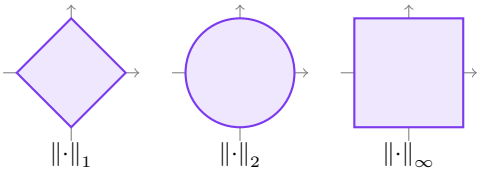
$$\|x\|_1 = \sum |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Sur $C([a, b], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_\infty = \sup |f|, \qquad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$



3. Suites

$x_n \to \ell$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

À retenir : limite unique ; une suite convergente est bornée ; toute extraite d'une suite convergente converge vers la même limite ; convergence dans un produit fini $\Leftrightarrow$ convergence coordonnée par coordonnée.
Valeur d'adhérence : limite d'une suite extraite. Deux valeurs d'adhérence distinctes $\Rightarrow$ divergence.

4. Normes équivalentes

N_1, N_2 équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Elles donnent les mêmes notions : convergence, borné, ouvert, fermé, continuité.
En dimension finie : toutes les normes sont équivalentes.
Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes : trouver x_n avec $N_1(x_n) \to 0$ mais $N_2(x_n) \not\to 0$, ou un quotient non borné.

5. Topologie

U ouvert : $\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U$.
F fermé : $E \setminus F$ ouvert. Critère séquentiel : F fermé $\Leftrightarrow$ toute suite de F convergeant dans E a sa limite dans F.

Point adhérent : toute boule centrée en lui coupe A.

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists a_n \in A, a_n \to a.$$

Frontière : $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$. Dense : $\overline{A} = E$.

6. Limites et continuité

Critère séquentiel : f continue en a si et seulement si

$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a).$$

Stabilités : sommes, produits, composées.
Images réciproques : f continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de tout ouvert est ouverte relative, ou de tout fermé est fermée relative.
Lipschitz : $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue.
Distance à une partie non vide :

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq \|x - y\| .$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Applications linéaires continues

Pour $u : E \to F$ linéaire :

$$u \text{ continue} \iff \exists C \geq 0,\ \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

Notation : $\mathcal{L}_c(E, F)$.
Norme d'opérateur :

$$\|u\|_{op} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F .$$

Sous-multiplicativité :

$$\|v \circ u\|_{op} \leq \|v\|_{op} \|u\|_{op} .$$

En dimension finie : toute application linéaire est continue.

8. Compacité

Définition séquentielle : K compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergeant vers un élément de K.
À retenir : compact $\Rightarrow$ fermé et borné ; fermé relatif d'un compact $\Rightarrow$ compact ; produit fini de compacts $\Rightarrow$ compact.
Dimension finie :

$$K \text{ compact} \iff K \text{ fermé et borné.}$$

9. Applications continues sur un compact

Si K est compact et $f : K \to F$ continue, alors $f(K)$ est compact.
Théorème de Heine : f est uniformément continue sur K.
Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et K non vide compact, alors f atteint ses bornes :

$$\exists a, b \in K, \quad f(a) = \min_K f, \quad f(b) = \max_K f.$$

Méthode d'existence d'extremum : compact + continuité.

10. Connexité par arcs

Chemin de a à b dans A : application continue $\gamma : [0, 1] \to A$ avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.
A connexe par arcs : tout couple de points de A peut être relié par un chemin dans A.
À retenir : convexe $\Rightarrow$ connexe par arcs ; étoilé $\Rightarrow$ connexe par arcs ; les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ; l'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

Dimension finie : les réflexes

Dans un espace de dimension finie :

- toutes les normes sont équivalentes ;
- convergence $\Leftrightarrow$ convergence des coordonnées ;
- compact $\Leftrightarrow$ fermé et borné ;
- tout sous-espace de dimension finie est fermé ;
- applications linéaires, multilinéaires et polynomiales continues.

Pièges classiques

- Intersection quelconque d'ouverts : faux en général. Seulement intersection finie.
- Fermé et borné $\Rightarrow$ compact : seulement en dimension finie.
- Toutes les normes équivalentes : seulement en dimension finie.
- Une partie peut être ouverte dans A sans être ouverte dans E.

Méthodes à savoir refaire

1. Montrer qu'une boule ouverte est ouverte : utiliser $r = R - \|a - c\|$.
2. Montrer qu'un ensemble est fermé : prendre une suite convergente et passer à la limite.
3. Prouver la continuité d'une application linéaire : chercher C tel que $\|u(x)\| \leq C \|x\|$.
4. Prouver l'existence d'un minimum/maximum : fermé + borné en dimension finie, puis fonction continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Suites, limites, continuité

Prépa MP / MPI – 2e année

Cadre

On travaille dans des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La distance associée à une norme est

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Les notions générales d'espace métrique, de suite de Cauchy et d'espace de Banach ne sont pas exigibles.

Convergence d'une suite

$$u_n \to \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \|u_n - \ell\| \to 0.$$

Forme quantifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Propriétés immédiates

Si (u_n) converge, alors :

- la limite est unique ;
- la suite est bornée ;
- toute suite extraite a la même limite ;
- dans un produit fini, la convergence équivaut à la convergence de chaque composante.

Suites extraites

Une valeur d'adhérence est la limite d'une suite extraite. Si une suite a deux valeurs d'adhérence distinctes, elle diverge.

Adhérence

Critère séquentiel

Pour $A \subset E$,

$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \to a.$$

Un point a est adhérent à A si toute boule centrée en a rencontre A.

Limite d'une application

Soient $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.

Définition

$$\lim_{x \to a,\ x \in A} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Critère séquentiel de limite

$$f(x) \to \ell \ (x \to a)$$

si et seulement si pour toute suite (x_n) de A telle que $x_n \to a$, on a

$$f(x_n) \to \ell.$$

Réfuter une limite

Trouver deux suites (x_n), (y_n) dans A, toutes deux convergeant vers a, telles que $f(x_n)$ et $f(y_n)$ n'aient pas la même limite.

Continuité

Continuité en un point

Pour $a \in A$, f est continue en a si

$$\lim_{x \to a,\ x \in A} f(x) = f(a).$$

Équivalent séquentiel :

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Continuité sur une partie

f est continue sur A si elle est continue en tout point de A. Les sommes, produits scalaires, produits quand ils ont un sens, et composées d'applications continues sont continus.

Images réciproques

Si $f : E \to F$ est continue, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert et l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue :

$$\{f > 0\} \text{ est ouvert}, \quad \{f = 0\}, \{f \geq 0\} \text{ sont fermés.}$$

Lipschitz et linéaire

Lipschitzien

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \Rightarrow f \text{ continue.}$$

Exemple : $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne car

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|.$$

Application linéaire continue

Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$u \text{ continue} \Longleftrightarrow \exists C \geq 0,\ \forall x,\ \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

Norme d'opérateur :

$$\|u\|_{op} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

Dimension finie

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Conséquences :

- la convergence ne dépend pas de la norme choisie ;
- on peut travailler coordonnée par coordonnée ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— toute application linéaire est continue ;
— les applications polynomiales en les coordonnées sont continues.

Prouver une convergence

1. Identifier la norme.
2. Calculer ou majorer $\|u_n - \ell\|$.
3. Montrer que cette norme tend vers 0.
4. En dimension finie : revenir aux coordonnées.

Prouver une continuité

1. Utiliser opérations algébriques et composition.
2. Ou montrer une estimation $\|f(x) - f(a)\| \leq C\,\|x - a\|$.
3. Pour une application linéaire : chercher $\|u(x)\| \leq C\,\|x\|$.

Pièges classiques

— Bornée ne signifie pas convergente.
— Une limite peut être étudiée en un point hors du domaine, s'il est adhérent au domaine.
— Une seule suite ne suffit pas à prouver qu'une limite n'existe pas.
— Le choix de la norme peut compter en dimension infinie.

Exemples à connaître

Matrices. Dans $M_n(\mathbb{K})$, $A_p \to A$ si et seulement si chaque coefficient converge.

Déterminant. det est continue, donc $GL_n(\mathbb{K}) = \{A : \det A \neq 0\}$ est ouvert.

Norme uniforme. Sur les fonctions bornées,

$$f_n \to f \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \iff \sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Évaluation. Sur $C([0,1])$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Compacité

Prépa MP / MPI, 2e année – Topologie des espaces vectoriels normés

Définition

Une partie $K \subset E$ est **compacte** si toute suite de K admet une suite extraite qui converge vers un élément de K.

À connaître absolument

- Compact $\Rightarrow$ fermé et borné.
- Fermé inclus dans un compact $\Rightarrow$ compact.
- Réunion finie de compactes $\Rightarrow$ compacte.
- Produit fini de compactes $\Rightarrow$ compact.
- Image continue d'un compact $\Rightarrow$ compacte.

Dimension finie

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie :

$$K \text{ compact} \iff K \text{ fermé et borné.}$$

Conséquences : les segments de $\mathbb{R}$, les pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^n$, les boules fermées et les sphères sont compacts.

Attention – Dimension infinie

En dimension infinie, « fermé et borné » ne suffit pas. Exemple : la boule unité fermée de $C([0,1])$ pour $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

Méthode : montrer compact

1. Vérifier que l'espace ambiant est de dimension finie.
2. Montrer que la partie est bornée.
3. Montrer qu'elle est fermée : équations continues, inégalités larges continues, image réciproque de fermés.
4. Conclure par fermé + borné.

Exemple – Exemple rapide

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x - y = 1\}$ est compacte : elle est bornée par la première contrainte et fermée comme intersection de $f^{-1}((-\infty, 4])$ et $g^{-1}(\{1\})$ avec $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x - y$ continues.

Bornes atteintes

Si K est compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists a, b \in K, \quad f(a) = \min_K f, \quad f(b) = \max_K f.$$

Heine

Si K est compact et $f : K \to F$ continue, alors f est uniformément continue sur K.

Distance à un compact

Si K est compact non vide, alors pour tout $x \in E$ il existe $a \in K$ tel que

$$d(x,K) = \inf_{y \in K} \|x - y\| = \|x - a\|.$$

Si $x \notin K$, alors $d(x,K) > 0$.

Distance entre deux compactes

Si K, L sont compactes non vides, alors $d(K,L)$ est atteinte. Si $K \cap L = \varnothing$, alors $d(K,L) > 0$.

Méthode – Optimisation sur compact

Pour prouver l'existence d'un minimum ou d'un maximum :

1. prouver K compact et non vide ;
2. prouver f continue ;
3. appliquer les bornes atteintes.

La compacité donne l'existence, pas forcément la valeur.

Attention – Pièges

- Ne pas oublier « non vide » pour les extrema.
- Ne pas confondre suite convergente et sous-suite convergente.
- Ne pas conclure compact par fermé borné hors dimension finie.
- Vérifier que la limite extraite appartient à l'ensemble.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Compacité – preuves types et réflexes

Preuve : compact ⇒ fermé

Si $x \in \overline{K}$, il existe $x_n \in K$ tel que $x_n \to x$. Par compacité, $x_{\varphi(n)} \to \ell \in K$. Mais $x_{\varphi(n)} \to x$, donc $x = \ell \in K$.

Preuve : compact ⇒ borné

Si K n'est pas borné, choisir $x_n \in K$ avec $\|x_n\| > n$. Une sous-suite convergente serait bornée, contradiction.

Preuve : image continue

Pour $y_n \in f(K)$, écrire $y_n = f(x_n)$. Extraire $x_{\varphi(n)} \to x \in K$, puis utiliser la continuité : $y_{\varphi(n)} \to f(x)$.

Fermés usuels

Sont fermés : $\{f = 0\}$ si f continue ; $\{f \leq a\}$ et $\{f \geq a\}$ si f continue réelle ; toute intersection finie de fermés.

Mini-exercice corrigé

Montrer que $K = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n\}$ est compact. **Réponse.** $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. L'application $A \mapsto A^T A$ est continue, donc K est fermé comme image réciproque de $\{I_n\}$. Si $A \in K$, chaque colonne a norme euclidienne 1, donc les coefficients de A sont bornés ; K est borné. Donc K est compact.

À utiliser dans les exercices

- Pour une distance minimale : minimiser $a \mapsto \|x - a\|$ sur un compact.
- Pour un paramètre optimal : compactifier l'ensemble des paramètres.
- Pour une sous-suite : vérifier que la suite est dans un compact.
- Pour une contradiction : extraire une sous-suite convergente puis passer à la limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Connexité par arcs

Prépa MP / MPI, 2e année – Topologie des espaces vectoriels normés

Définitions

Un **chemin** dans A joignant a à b est une application continue $\gamma : [0,1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. A est **connexe par arcs** si deux points quelconques de A peuvent être joints par un chemin dans A.

Exemples immédiats

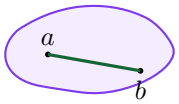
- Tout singleton est connexe par arcs.
- Toute partie convexe est connexe par arcs.
- Toute partie étoilée est connexe par arcs.
- Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties connexes par arcs non vides de $\mathbb{R}$.
- Pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

Chemin à connaître

Dans une partie convexe :

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb.$$

Dans une partie étoilée de centre c : aller de a à c, puis de c à b par deux segments.



Images continues

Si A est connexe par arcs et $f : A \to F$ continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.
En particulier, si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(A)$ est un intervalle.

Valeurs intermédiaires

Si A est connexe par arcs, $f : A \to \mathbb{R}$ continue, et $f(a) < y < f(b)$, alors il existe $c \in A$ tel que $f(c) = y$.

Réunions

- Si des parties connexes par arcs ont un point commun, leur réunion est connexe par arcs.
- Si $A_1, \ldots, A_p$ sont connexes par arcs et $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$, alors $\bigcup_i A_i$ est connexe par arcs.

Méthode – Montrer que A est connexe par arcs

1. Tester la convexité.
2. Tester le caractère étoilé.
3. Décomposer en réunion de morceaux connexes par arcs qui se coupent.
4. Construire un chemin polygonal.
5. Écrire $A = f(B)$ avec B connexe par arcs et f continue.

Méthode – Montrer que A ne l'est pas

Trouver une application continue $f : A \to \mathbb{R}$ telle que $f(A)$ ne soit pas un intervalle, ou un invariant continu qui ne peut pas changer de valeur le long d'un chemin.

Exemple – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs : le déterminant est continu et ne peut pas passer d'une valeur positive à une valeur négative sans s'annuler.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Connexité par arcs – preuves et réflexes

Convexe ⇒ connexe par arcs

Pour $a, b \in C$, le segment $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ est continu et reste dans C.

Image continue

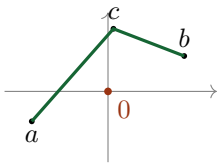
Si $u = f(a)$ et $v = f(b)$, prendre un chemin γ de a à b. Alors $f \circ \gamma$ joint u à v dans $f(A)$.

Dans $\mathbb{R}$

Une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$ est un intervalle : un chemin continu de a à b prend toutes les valeurs intermédiaires.

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$

Pour joindre a à b, si $[a, b]$ évite 0, prendre le segment. Sinon, choisir $c \notin \mathbb{R}a \cup \mathbb{R}b$ et prendre le chemin polygonal $a \to c \to b$.



Lien avec connexité

Connexe par arcs ⇒ connexe. La réciproque est fausse en général, mais vraie pour les ouverts d'un espace vectoriel normé.

Attention – Pièges

- Le segment entre deux points peut sortir de l'ensemble.
- L'image réciproque d'une partie connexe par arcs par une application continue n'est pas forcément connexe par arcs.
- Il faut vérifier que le chemin reste dans l'ensemble.
- Un dessin ne remplace pas une preuve.

Mini-exercice corrigé

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$ est connexe par arcs. **Réponse.** L'ensemble est convexe car la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe : si $y_i > x_i^2$, alors pour $t \in [0, 1]$,

$$(1-t)y_1 + ty_2 > (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \geq ((1-t)x_1 + tx_2)^2.$$

Donc le segment entre deux points de A reste dans A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Séries numériques

Prépa MP / MPI – 2e année

Définitions

Pour une suite (u_n), la série $\sum u_n$ a pour sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Elle converge si (S_N) admet une limite finie. Sa somme est $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
Si $\sum u_n$ converge, son reste est

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n, \qquad R_N \to 0.$$

Condition nécessaire

Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$.
Si $u_n \not\to 0$: divergence grossière.
Mais $u_n \to 0$ ne suffit pas : $\sum 1/n$ diverge.

Séries positives

Si $u_n \geq 0$, alors (S_N) est croissante.

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (S_N) \text{ est majorée.}$$

Comparaison : si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang,
— $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
— $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Relations de comparaison

Avec $u_n, v_n \geq 0$ à partir d'un certain rang :
— $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
— $u_n \sim v_n \Rightarrow$ les deux séries sont de même nature.
La suite de référence doit être de signe constant à partir d'un certain rang.

Séries de référence

Géométrique :

$$\sum_{n\geq 0} q^n \text{ converge } \iff |q| < 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Riemann :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Logarithmique usuelle :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge } \iff \beta > 1.$$

Comparaison série-intégrale

Si f est positive décroissante :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_{n}^{N} f(t)dt.$$

Usages : convergence/divergence, estimation de sommes partielles et de restes.
Conséquences :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (\alpha < 1),$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad (\alpha > 1).$$

Règle de d'Alembert

Si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \ell,$$

alors :
— $\ell < 1$: convergence absolue ;
— $\ell > 1$: divergence grossière ;
— $\ell = 1$: aucune conclusion.
Très utile avec factorielles, puissances, produits.

Convergence absolue

$\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge.
Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.
Pour une série vectorielle dans un espace normé de dimension finie : si $\sum \|u_n\|$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Télescopage

Si $u_n = a_{n+1} - a_n$, alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = a_{N+1} - a_0.$$

Donc $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si (a_n) converge.

mathlvl.fr – Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sommer les équivalents

Soient $u_n, v_n \geq 0$ et $u_n \sim v_n$.
Si $\sum v_n$ converge, alors les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Si $\sum v_n$ diverge, alors les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim \sum_{k=n_0}^{n} v_k.$$

Cas particulier : Cesàro. Si $u_n \to \ell$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell.$$

Méthode rapide

1. Vérifier si $u_n \to 0$.
2. Si termes positifs : comparer à Riemann, géométrique, logarithmique.
3. Si factorielle/exponentielle : d'Alembert.
4. Si différence : télescopage.
5. Pour un équivalent de somme ou de reste : sommation des équivalents ou série-intégrale.

Attention

- $u_n \to 0$ ne prouve jamais la convergence.
- D'Alembert avec limite 1 ne donne rien.
- Une équivalence de termes positifs donne la même nature, pas forcément la même somme.
- Pour un reste convergent, on somme de $n+1$ à $+\infty$.
- Le critère de Cauchy est hors programme.

Exemples réflexes

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{ convergence.}$$

$$\frac{n^2+1}{n^3+2n} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \text{ divergence.}$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Donc

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \sim \frac{1}{2n^{3/2}} \Rightarrow \text{ convergence.}$$

mathlvl.fr – Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Séries vectorielles

Prépa MP / MPI – 2e année

Cadre

E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une série vectorielle $\sum u_n$ est une série dont les termes u_n appartiennent à E.
Sommes partielles :

$$S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

Convergence : $\sum u_n$ converge si (S_N) converge dans E.

Somme et reste

Si $\sum u_n$ converge :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Reste d'ordre N :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n, \qquad R_N \to 0_E.$$

Condition nécessaire

Si $\sum u_n$ converge, alors

$$u_n \to 0_E.$$

Si $u_n \not\to 0_E$: divergence grossière.
Attention : $u_n \to 0_E$ ne suffit pas. Exemple : $u_n = (1/n, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Linéarité

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$$

converge et

$$\sum (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum u_n + \mu \sum v_n.$$

Critère par les coordonnées

Dans une base $(e_1, \dots, e_p)$, on écrit

$$u_n = u_{n,1} e_1 + \cdots + u_{n,p} e_p.$$

Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i,\ \sum u_{n,i} \text{ converge}.$$

Dans ce cas :

$$\sum u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i.$$

Séries de matrices

Pour $A_n = (a_{ij}^{(n)}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\sum A_n \text{ converge} \iff \forall i, j,\ \sum a_{ij}^{(n)} \text{ converge}.$$

La somme se calcule coefficient par coefficient.

Convergence absolue

$\sum u_n$ est absolument convergente si

$$\sum \|u_n\| \text{ converge}.$$

En dimension finie :

$$\sum \|u_n\| < +\infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}.$$

Ce critère ne dépend pas de la norme choisie.

Domination

Si $a_n \geq 0$, $\sum a_n$ converge et

$$\|u_n\| \leq a_n$$

à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ converge absolument.
Version asymptotique : si $\|u_n\| = O(a_n)$ et $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Estimation du reste

Si $\sum \|u_n\|$ converge, alors

$$\|R_N\| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Si $\|u_n\| \leq a_n$ et $\sum a_n$ converge :

$$\|R_N\| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n.$$

Application linéaire

Si $T : E \to F$ est linéaire et si $\sum u_n$ converge, alors

$$\sum T(u_n) \text{ converge}$$

et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} T(u_n) = T\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right).$$

En dimension finie, toute application linéaire est continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Direction fixe

Pour $v \in E$:

$$\sum a_n v$$

converge si $v = 0_E$ ou si $\sum a_n$ converge. Dans ce cas :

$$\sum a_n v = \left(\sum a_n\right) v.$$

Exemple, si $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n v = \frac{1}{1-q} v.$$

Série géométrique matricielle

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\|A\| < 1$ pour une norme sous-multiplicative, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}.$$

La condition $\|A\| < 1$ est suffisante.

Méthode rapide

Pour étudier $\sum u_n$:

1. Tester $u_n \to 0_E$.
2. Chercher une majoration de $\|u_n\|$ par une série numérique convergente.
3. Sinon, écrire les coordonnées et étudier chaque série numérique.
4. Pour les matrices : coefficients ou norme matricielle.

Attention

À ne pas faire :

— conclure avec seulement $u_n \to 0_E$;

— croire que $\sum \|u_n\|$ divergente implique forcément $\sum u_n$ divergente ;

— oublier qu'une seule coordonnée divergente fait diverger toute la série vectorielle ;

— changer de norme avec inquiétude : en dimension finie, les normes sont équivalentes.

Exemples-types

Dans $\mathbb{R}^3$:

$$\sum \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^n}, \frac{\ln n}{n^2}\right)$$

converge : toutes les coordonnées convergent.

Dans $\mathbb{R}^2$:

$$\sum \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$$

diverge : première coordonnée harmonique.

Si $\|u_n\| \leq C/n^{3/2}$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Suites et séries de fonctions

Prépa MP / MPI (2e année) - Fiche de révision

Cadre. Fonctions définies sur $A \subset E$, où E est de dimension finie, à valeurs dans un espace normé F de dimension finie. En pratique : valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour g bornée :

$$\|g\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} \|g(x)\|.$$

1. Suites de fonctions

Convergence simple

(u_n) converge simplement vers u sur A si

$$\forall x \in A, \qquad u_n(x) \to u(x).$$

Le rang peut dépendre de x.

Convergence uniforme

(u_n) converge uniformément vers u sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A, \quad \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon.$$

Si les différences sont bornées :

$$u_n \to u \text{ uniformément} \iff \|u_n - u\|_{\infty,A} \to 0.$$

convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence simple

La réciproque est fausse.

Méthodes rapides

— Chercher d'abord la limite simple u.

— Pour l'uniforme : majorer $\|u_n(x) - u(x)\| \leq a_n$ avec $a_n \to 0$ indépendant de x.

— Pour nier l'uniforme : trouver $x_n \in A$ tel que $\|u_n(x_n) - u(x_n)\| \not\to 0$.

Toujours préciser le domaine : x^n n'a pas le même comportement sur $[0,1]$, $[0,1[$ et $[0,a]$ avec $a < 1$.

2. Théorèmes de passage à la limite

Continuité

Si les u_n sont continues en a et si $u_n \to u$ uniformément sur A, alors u est continue en a.

En particulier, une limite uniforme de fonctions continues est continue. Localement, on utilise souvent la convergence uniforme sur tout segment.

Double limite

Si $u_n \to u$ uniformément sur A, si a est adhérent à A, et si chaque u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) converge vers ℓ et

$$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démonstration hors programme.

Intégration sur un segment

Si u_n sont continues sur I et $u_n \to u$ uniformément sur tout segment de I, alors, pour $a \in I$,

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad U_n \to U : x \mapsto \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t$$

uniformément sur tout segment. En particulier, sur $[a,b]$:

$$\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dérivation

Si $u_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$, $u_n \to u$ simplement sur I et $u_n' \to v$ uniformément sur tout segment, alors

$u_n \to u$ uniformément localement, $\quad u \in \mathcal{C}^1(I,F), \quad u' = v.$

Extension $\mathcal{C}^k$: convergence simple des dérivées d'ordre 0 à $k-1$ et convergence uniforme locale de l'ordre k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Séries de fonctions

Pour $f_n : A \to F$, on note

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

La série $\sum f_n$ converge simplement/uniformément si la suite (S_N) converge simplement/uniformément.
Si $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, le reste est

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n.$$

$\sum f_n$ converge uniformément

si et seulement si elle converge simplement et

$$\|R_N\|_{\infty,A} \to 0.$$

4. Convergence normale

$\sum f_n$ converge normalement sur A si les f_n sont bornées et si

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_{\infty,A}$$

converge.

Critère pratique : si

$$\forall x \in A, \quad \|f_n(x)\| \leq M_n \quad \text{et} \quad \sum M_n \text{ converge},$$

alors $\sum f_n$ converge normalement.

normale ⇒ uniforme ⇒ simple

La convergence normale entraîne aussi la convergence absolue en tout point.

Uniforme n'implique pas normale. La convergence normale est un critère suffisant très fort.

5. Régularité d'une somme

Soit $S = \sum f_n$.

Continuité

Si les f_n sont continues et $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors S est continue sur A.

Intégration terme à terme

Sur $[a,b]$, si f_n continues et $\sum f_n$ converge uniformément :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dérivation terme à terme

Si $f_n \in \mathcal{C}^1(I,F)$, si $\sum f_n$ converge simplement et si $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment, alors

$$S \in \mathcal{C}^1(I,F), \qquad S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

De plus $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment.

6. Exemples à connaître

x^n

— Sur $[0,1]$: limite simple 0 sur $[0,1[$ et 1 en 1 ; pas uniforme.

— Sur $[0,1[$: limite simple 0 ; pas uniforme car $\sup_{[0,1[} x^n = 1$.

— Sur $[0,a]$, $a<1$: uniforme vers 0 car $\sup x^n = a^n \to 0$.

Pic mobile

Sur $[0,1]$, $u_n(x) = nx(1-x)^n$ converge simplement vers 0, mais pas uniformément : avec $x_n = 1/(n+1)$,

$$u_n(x_n) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}.$$

Série normalement convergente

Sur $[-1,1]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

converge normalement car $|x^n/n^2| \leq 1/n^2$. Donc sa somme est continue, intégrable terme à terme, et elle est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ par convergence normale locale de la série dérivée.

7. Approximation uniforme

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. La démonstration n'est pas exigible.

8. Checklist de rédaction

1. Déterminer la limite simple ou la somme ponctuelle.
2. Indiquer clairement le domaine A.
3. Pour uniforme : norme sup ou estimation du reste.
4. Pour normale : majoration uniforme par une série numérique convergente.
5. Pour continuité/intégration/dérivation : citer le théorème et vérifier les hypothèses.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Séries entières

Prépa MP / MPI (2e année) - Fiche de révision

Définition

Une série entière est une série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

où les coefficients a_n sont réels ou complexes et z est réel ou complexe. Pour z fixé, on étudie la série numérique $\sum a_n z^n$.

Lemme d'Abel

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Rayon de convergence

$$R = \sup\{r \geq 0 \ ; \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Alors :

— si $|z| < R$, convergence absolue ;

— si $|z| > R$, divergence grossière ;

— si $|z| = R$, aucune règle générale.

Variable réelle : intervalle ouvert $]-R, R[$.
Variable complexe : disque ouvert $D(0, R)$.

Bord

Le rayon ne décide pas les points $x = R$ et $x = -R$. On remplace dans la série et on étudie deux séries numériques ordinaires.

Calculer R

1. D'Alembert. Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell,$$

alors

$$R = \frac{1}{\ell}, \quad 1/0 = +\infty, \quad 1/(+\infty) = 0.$$

2. Comparaison.

— $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$;

— $a_n = o(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$;

— $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$.

Rayons de référence

Série	Rayon
$\sum z^n$	1
$\sum n^\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$	1
$\sum \frac{z^n}{n!}$	$+\infty$
$\sum n! z^n$	0
$\sum a^n z^n$	$1/\lvert a\rvert$ si $a \neq 0$

Convergence normale

Si R est le rayon de $\sum a_n z^n$, alors pour tout $r < R$, la série converge normalement sur $\{|z| \leq r\}$. En variable réelle : convergence normale sur tout segment $[-r, r] \subset]-R, R[$.

Somme et régularité

Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (|x| < R),$$

alors f est continue sur $]-R, R[$. Elle est même C^∞ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Plus généralement,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Une primitive F s'écrit

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Toujours dans l'ouvert

Dérivation et intégration terme à terme sont valables sur $]-R, R[$, pas automatiquement au bord.

Unicité des coefficients

Si $f(x) = \sum a_n x^n$ sur un voisinage de 0, alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Donc un développement en série entière, s'il existe, est unique.

Produit de Cauchy

Si

$$A(z) = \sum a_n z^n, \quad B(z) = \sum b_n z^n,$$

alors, pour $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Le rayon du produit est au moins $\min(R_a, R_b)$.

Plan type d'étude

Pour $\sum a_n x^n$:

1. calculer R ;
2. écrire convergence absolue pour $|x| < R$;
3. écrire divergence grossière pour $|x| > R$;
4. étudier $x = R$ et $x = -R$ si besoin ;
5. si l'on cherche la somme, partir d'une série usuelle puis dériver, intégrer, multiplier ou substituer.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Développements usuels et méthodes

Développements à connaître

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

avec

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Obtenir un DSE

- **Substitution :** remplacer x par $u(x)$ avec $u(x) \to 0$.
- **Dérivation :** utile pour faire apparaître un facteur n.
- **Intégration :** utile pour faire apparaître $1/n$ ou $1/(n+1)$.
- **Produit de Cauchy :** utile pour les produits de fonctions.
- **Équation différentielle :** poser $y = \sum a_n x^n$, identifier les coefficients.

Formule de Taylor avec reste intégral

Si $f \in C^{n+1}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Elle sert à prouver que le reste tend vers 0.

Exemples rapides

1. Rayon. Pour $\sum \frac{n^2+1}{3^n} x^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3},$$

donc $R = 3$.

2. Somme. Pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

3. Logarithme. Pour $|x| < 1$,

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Erreurs fréquentes

- oublier d'étudier les points du bord ;
- donner une somme sans préciser le domaine ;
- utiliser $\sum x^n = 1/(1-x)$ hors de $|x| < 1$;
- dériver ou intégrer au bord sans justification ;
- croire que C^∞ implique développable en série entière.

À retenir en une ligne

Dans une série entière, tout est stable et très régulier à l'intérieur du rayon ; le bord est toujours une question séparée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fonctions vectorielles

Prépa MP / MPI (2e année) – Dérivation et intégration

Cadre. I intervalle de $\mathbb{R}$, E espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fonction vectorielle est une application $f : I \to E$. Dans une base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

En dimension finie, les propriétés se vérifient coordonnée par coordonnée.

Coordonnées : réflexe essentiel.

- $f(t) \to \ell$ ssi $f_i(t) \to \ell_i$ pour tout i.
- f continue ssi toutes les coordonnées le sont.
- f dérivable ssi toutes les coordonnées le sont.
- $f'(t) = \sum_i f_i'(t) e_i$.
- $\displaystyle\int_a^b f = \sum_i \left(\int_a^b f_i \right) e_i$.

Dérivée. f est dérivable en a si

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \to f'(a).$$

Équivalent :

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a) + o(h).$$

Pour $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$:

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)).$$

Interprétation : $f'(t)$ est un vecteur vitesse ; $f''(t)$ est un vecteur accélération.

Règles de dérivation.

- Linéarité : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- Si L est linéaire : $(L \circ f)' = L(f')$.
- Si B est bilinéaire :

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

- Produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle.$$

- Norme au carré :

$$(\|f\|^2)' = 2\langle f', f \rangle.$$

- Reparamétrage :

$$(f \circ \varphi)' = (\varphi')\, f' \circ \varphi.$$

Classe C^k et Taylor-Young. f est C^k ssi ses coordonnées sont C^k. Si f est C^k au voisinage de a, alors

$$f(a + h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(a) + o(h^k).$$

Exemple :

$$(e^t, \cos t) = (1, 1) + t(1, 0) + \frac{t^2}{2}(1, -1) + o(t^2).$$

Intégrale vectorielle sur un segment. Pour $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux :

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_i \left(\int_a^b f_i(t)\, \mathrm{d}t \right) e_i.$$

Propriétés : linéarité, Chasles, et si L est linéaire,

$$L\left(\int_a^b f \right) = \int_a^b L(f).$$

Inégalité clé. Pour toute fonction vectorielle continue par morceaux :

$$\left\| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, \mathrm{d}t.$$

C'est l'outil principal pour majorer une intégrale vectorielle.

Lien dérivation/intégration. Si $f : I \to E$ est continue et $a \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

est C^1 et $F' = f$. Si F est C^1 :

$$\int_a^b F'(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Intégration par parties bilinéaire :

$$[B(u, v)]_a^b = \int_a^b B(u', v) + \int_a^b B(u, v').$$

Accroissements finis : version vectorielle. Si $f \in C^1([a, b], E)$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t.$$

Si $\|f'\| \leq M$:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Piège : en général, il n'existe pas de c tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Intégrabilité sur un intervalle quelconque. Pour $f : I \to E$, une méthode sûre est de montrer

$$\int_I \|f(t)\| \, \mathrm{d}t < +\infty.$$

Alors f est intégrable par coordonnées et

$$\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|.$$

Si $\|f(t)\| \leq g(t)$ avec $g \geq 0$ intégrable, alors f est intégrable.

Exemples rapides.

$$f(t) = (e^t, t^2) \Rightarrow f'(t) = (e^t, 2t),$$
$$\int_0^1 (e^t, t^2)\, \mathrm{d}t = (e - 1, 1/3),$$
$$u(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow u'(t) = (-\sin t, \cos t),$$
$$\|u(t)\|^2 = 1 \Rightarrow \langle u'(t), u(t)\rangle = 0.$$

Méthode en devoir.

1. Choisir une base et écrire les coordonnées.
2. Appliquer le résultat scalaire aux coordonnées.
3. Recomposer le vecteur.
4. Pour une majoration, passer par la norme.
5. Pour une différence $f(b) - f(a)$, écrire d'abord $\int_a^b f'$.

Fonctions vectorielles – points de vigilance

Ce qu'il ne faut pas faire.

— Écrire un théorème des accroissements finis avec égalité vectorielle sans justification.

— Confondre f et $\|f\|$.

— Oublier que la norme choisie n'a pas d'importance pour la convergence en dimension finie, mais qu'elle peut changer les constantes de majoration.

— Dériver $\|f\|$ comme si c'était $\|f'\|$: c'est faux en général.

— Dériver un produit sans identifier la structure bilinéaire utilisée.

Formules à reconnaître.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, \mathrm{d}t.$$

$$\left\| \int f \right\| \leq \int \|f\|.$$

$$(\langle f, g\rangle)' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle.$$

$$\left(\|f\|^2\right)' = 2\langle f', f\rangle.$$

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Mini-exercice corrigé 1. Soit $f(t) = (t, e^{-t}, \sin t)$. Alors

$$f'(t) = (1, -e^{-t}, \cos t)$$

et

$$\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}, 1 - e^{-1}, 1 - \cos 1\right).$$

Mini-exercice corrigé 2. Soit $u \in C^1([a, b], E)$ et $\|u'\| \leq 3$. Alors

$$\|u(b) - u(a)\| \leq 3(b - a).$$

Justification :

$$u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Mini-exercice corrigé 3. Si $u : \mathbb{R} \to E$ est C^1 et vérifie $\langle u'(t), u(t)\rangle = 0$ pour tout t, alors

$$(\|u(t)\|^2)' = 0.$$

Donc $\|u(t)\|$ est constante. Interprétation : la vitesse est toujours orthogonale au rayon vecteur.

Plan type pour prouver une propriété vectorielle. Pour montrer une limite, une continuité, une dérivabilité ou une intégrabilité :

1. Fixer une base (e_i).
2. Écrire $f = \sum f_i e_i$.
3. Appliquer les théorèmes scalaires à chaque f_i.
4. Conclure dans E en utilisant la dimension finie.

Phrase à retenir. En dimension finie, une fonction vectorielle se traite comme un paquet fini de fonctions scalaires, mais les majorations se font avec la norme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Intégrales généralisées

Prépa MP / MPI (2e année)

1. Définition

Soit f continue par morceaux sur tout segment de $[a, b[$.

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{K}.$$

Sur $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \iff \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe finie.}$$

Avec plusieurs points impropres, on coupe et chaque morceau doit converger.

2. Point clé

Pas de compensation entre divergences. Par exemple une valeur principale symétrique peut exister sans que l'intégrale généralisée converge.

3. Fonctions positives

Pour $f, g \geq 0$ au voisinage du point impropre :

- $0 \leq f \leq g$ et $\int g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge ;
- $0 \leq g \leq f$ et $\int g$ diverge $\Rightarrow \int f$ diverge ;
- $f \sim g \Rightarrow \int f$ et $\int g$ sont de même nature ;
- $f = O(g)$ et $\int g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge si $f, g \geq 0$.

4. Références indispensables

Intégrale	Condition
$\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$	$\alpha > 1$
$\displaystyle\int_0^{\eta} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$	$\alpha < 1$
$\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$	$\beta > 1$
$\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$	$\lambda > 0$

À l'infini, $1/t$ est la frontière. Près de 0, $1/t$ est aussi la frontière mais dans le sens inverse.

5. Équivalents usuels

Quand $t \to 0$:

$$\sin t \sim t, \quad \tan t \sim t, \quad 1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}, \quad \ln(1+t) \sim t.$$

Quand $t \to +\infty$:

$$1 + t^\beta \sim t^\beta \ (\beta > 0), \quad \ln(1+t) \sim \ln t.$$

6. Intégrabilité

Scalaire :

$$f \text{ intégrable sur } I \iff \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Vectoriel, $f : I \to E$ avec E de dimension finie :

$$f \text{ intégrable} \iff \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Alors

$$\left\| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_I \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

7. Critère par coordonnées

Si $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) e_k$ dans une base de E de dimension finie, alors

$$f \text{ intégrable} \iff f_1, \ldots, f_n \text{ intégrables.}$$

Et

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \left(\int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t \right) e_k.$$

8. Outils de calcul

Primitive : si $F' = f$ et $F(x)$ a une limite finie au point impropre, alors

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a).$$

Changement de variable et intégration par parties se font d'abord sur des segments, puis on passe à la limite. Toujours vérifier les termes de bord et la convergence.

9. Méthode rapide

1. Repérer tous les points impropres.
2. Couper l'intervalle.
3. Sur chaque morceau, chercher un équivalent ou une domination.
4. Comparer à une référence.
5. Pour un signe variable : tester d'abord $|f|$.
6. Conclure : convergence, divergence, intégrabilité ou convergence non absolue.

10. Pièges

- $f(t) \to 0$ ne suffit pas : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.
- Une seule divergence locale fait diverger l'intégrale totale.
- L'équivalence doit être prise au bon point impropre.
- Pour prouver l'intégrabilité, on compare $|f|$ ou $\|f\|$, pas seulement f.

11. Exemples types

Type 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$$

converge ssi $\alpha > -1$ près de 0 et $\beta > \alpha + 1$ à l'infini.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Type 2.

$$\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

converge ssi $2-\alpha > -1$, donc ssi $\alpha < 3$.

Type 3.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

converge ssi $\alpha > 1$.

12. Phrase de conclusion attendue

Une conclusion propre mentionne toujours le point impropre étudié et le critère utilisé :

$$f(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}} \quad (t \to +\infty),$$

or $\int_1^{+\infty} t^{-3/2}\,\mathrm{d}t$ converge ; donc l'intégrale converge au voisinage de $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Intégrales à paramètre

Prépa MP / MPI (2e année)

Cadre

On étudie

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

I : intervalle d'intégration. t : variable muette. x : paramètre. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Toujours commencer par : fixer x et montrer que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable ou que l'intégrale converge.

Domination : le réflexe central

Sur un segment K de paramètres, chercher $\varphi_K \geq 0$ intégrable telle que

$$\forall x \in K, \quad |f(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$

Pour dériver, on domine plutôt $|\partial_x f(x,t)|$.

Attention : φ_K ne doit pas dépendre de x dans K.

Convergence dominée

Si $f_n \to f$ simplement sur I et s'il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall n, \forall t, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t),$$

alors

$$\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Version paramètre : si $f(x,t) \to g(t)$ quand $x \to a$ et si $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ pour x proche de a, alors

$$\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \to \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégration terme à terme

Si $u_n \geq 0$ sont intégrables et si $\sum u_n$ converge simplement, alors

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

dans $[0, +\infty]$.

Si u_n sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

alors $\sum u_n$ est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Continuité sous le signe intégral

Pour montrer que

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur A, vérifier :

- pour tout t, $x \mapsto f(x,t)$ est continue ;
- pour tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux ;
- domination intégrable : $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$, globalement ou localement sur tout segment de A.

Alors F est continue.

Dérivabilité sous le signe intégral

Pour A, I intervalles de $\mathbb{R}$, si :

- $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 pour tout t ;
- $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable pour tout x ;
- $t \mapsto \partial_x f(x,t)$ est continue par morceaux ;
- $|\partial_x f(x,t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable, au moins localement en x ;

alors

$$F \in C^1(A), \qquad F'(x) = \int_I \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Classe C^k

Si les dérivées partielles $\partial_x^j f$ existent jusqu'à l'ordre k et sont dominées localement par des fonctions intégrables, alors

$$F^{(j)}(x) = \int_I \partial_x^j f(x,t)\,\mathrm{d}t, \qquad 0 \leq j \leq k.$$

Cas typique :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Méthode de rédaction

1. Définir clairement I et l'ensemble des paramètres.
2. Vérifier l'existence de l'intégrale.
3. Étudier la régularité en x à t fixé.
4. Trouver un majorant intégrable, global ou local.
5. Citer le théorème et conclure.

Exemples à connaître

1. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}.$$

Domination : $|e^{-t}\cos(xt)| \leq e^{-t}$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t = \arctan x.$$

On dérive sous l'intégrale : la dérivée est

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Pour $x > -1$,

$$L(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est C^1 et

$$L'(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt} = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pièges fréquents

— Oublier de prouver que $F(x)$ existe.
— Dominer par une fonction dépendant de x.
— Dériver sous l'intégrale sans domination de $\partial_x f$.
— Négliger une singularité en 0, en une borne finie, ou à l'infini.
— Conclure trop vite à une limite sans domination.

Test rapide de domination

Sur $]0,1]$, t^a est intégrable si $a > -1$. Sur $[1,+\infty[$, t^{-a} est intégrable si $a > 1$. Les fonctions $t^m e^{-ct}$, avec $c > 0$, sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Équations différentielles linéaires

Prépa MP / MPI (2e année)

Cadre

I intervalle de $\mathbb{R}$, E espace normé de dimension finie.

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ sont continues.
En coordonnées :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

L'équation homogène associée est $x' = a(t)x$.

Problème de Cauchy

Condition initiale :

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Forme intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(s)x(s) + b(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Théorème de Cauchy linéaire : il existe une unique solution sur tout I. La démonstration n'est pas exigible.

Structure des solutions

Cas homogène : les solutions forment un espace vectoriel. Pour tout t_0,

$$x \longmapsto x(t_0)$$

est un isomorphisme de l'espace des solutions sur E. Donc si $\dim E = n$, l'espace des solutions homogènes est de dimension n.
Avec second membre : si x_p est une solution particulière,

$$\mathcal{S} = x_p + \mathcal{S}_h.$$

L'ensemble des solutions est affine, dirigé par les solutions homogènes.

Équation scalaire d'ordre n

Une équation normalisée

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b$$

se transforme en système avec

$$X = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^{\mathsf{T}}.$$

Le problème de Cauchy impose

$$y(t_0), y'(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0).$$

Cas homogène : l'espace des solutions est de dimension n.

Non normalisé

Pour

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad \text{ou} \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t),$$

on ne divise par $a(t)$ que sur les intervalles où $a(t) \neq 0$.

Exponentielle de matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{e}^{A} = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Propriétés :
- $\mathrm{e}^{0} = I_n$;
- si $AB = BA$, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$;
- $\mathrm{e}^{PAP^{-1}} = P\mathrm{e}^{A}P^{-1}$;
- si $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, alors $\mathrm{e}^{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})$;
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}A$;
- $\mathrm{Sp}(\mathrm{e}^{A}) = \{\mathrm{e}^{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Piège majeur

En général,

$$\mathrm{e}^{A+B} \neq \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}.$$

La formule est vraie si A et B commutent.

Système homogène constant

Pour

$$X' = AX, \qquad X(t_0) = X_0,$$

l'unique solution est

$$X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0.$$

Si $A = PDP^{-1}$,

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}.$$

Si $A = \lambda I + N$ avec $N^p = 0$,

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I + tN + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right).$$

Blocs à reconnaître

1. Diagonal :

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow X_i(t) = C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

2. Jordan taille 2 :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Rotation-dilatation :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Lecture qualitative

Pour $X' = AX$:
- si toutes les parties réelles des valeurs propres sont < 0, les solutions tendent vers 0 ;
- si une valeur propre a une partie réelle > 0, il existe des directions instables ;
- valeurs propres non réelles : rotation, éventuellement avec spirale si la partie réelle est non nulle.

La résolution explicite complète des systèmes constants n'est pas l'objectif principal : garder des calculs raisonnables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Second membre constant ou variable

Pour $X' = AX + B(t)$ et $X(t_0) = X_0$:

$$X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}B(s)\,\mathrm{d}s.$$

Méthode : résoudre l'homogène, trouver une solution particulière, ajouter.

Wronskien, ordre 2

Pour l'homogène

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

si u, v sont solutions :

$$W(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t).$$

u, v forment une base de solutions ssi $W(t_0) \neq 0$ pour un t_0 ; alors W ne s'annule pas sur I.

Variation des constantes, ordre 2

Pour

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t),$$

avec (u, v) base de l'homogène, chercher

$$y_p = \alpha u + \beta v.$$

On impose

$$\alpha' u + \beta' v = 0, \qquad \alpha' u' + \beta' v' = r.$$

Donc

$$\alpha' = -\frac{vr}{W}, \qquad \beta' = \frac{ur}{W}.$$

Puis intégrer α' et β'.

Checklist exercice

1. Identifier homogène / second membre.
2. Vérifier le cadre : intervalle, continuité, normalisation.
3. Utiliser Cauchy pour existence-unicité.
4. Décrire la structure des solutions.
5. Si coefficients constants : calculer e^{tA}.
6. Imposer les conditions initiales à la fin.

À éviter

— oublier le facteur $t - t_0$;
— diviser par un coefficient qui peut s'annuler ;
— confondre solution particulière et solution générale ;
— appeler vectoriel l'ensemble des solutions avec second membre ;
— diagonaliser une matrice sans vérifier qu'elle l'est.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Calcul différentiel

Prépa MP / MPI (2e année) — fiche de révision

Cadre

E, F : espaces vectoriels normés réels de dimension finie.
$\Omega \subset E$ ouvert, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to F$.

— $h \to 0_E$: variation dans l'espace de départ.
— $\mathrm{d}f(a)$: application linéaire de E vers F.
— Si $F = \mathbb{R}$ et E euclidien : on peut parler de gradient.

Dérivées directionnelles et partielles

Dérivée selon $v \in E$:

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Dans une base $(e_1, \dots, e_n)$:

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a).$$

Attention : existence des dérivées partielles $\not\Rightarrow$ différentiabilité.

Différentiabilité

f est différentiable en a si

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|),$$

avec $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors L est unique et

$$L = \mathrm{d}f(a), \qquad D_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

Conséquences : différentiable $\Rightarrow$ continue et dérivable selon tout vecteur.

Jacobienne

Pour $f = (f_1, \dots, f_p) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$:

$$J_f(a) = (\partial_j f_i(a))_{1 \le i \le p, 1 \le j \le n}.$$

Si h est une colonne :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = J_f(a) h.$$

Pour $p = 1$: $J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n f(a) \end{pmatrix}$.

Gradient

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et E euclidien :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Dans $\mathbb{R}^n$ canonique :

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix}.$$

Si $\nabla f(a) \neq 0$, la direction de croissance maximale est

$$\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}.$$

Le gradient est normal aux lignes/surfaces de niveau.

Opérations et chaîne

Linéarité :

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a).$$

Composée : si $g \circ f$ est définie,

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a),$$

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a).$$

Le long d'un arc γ :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Si f est scalaire : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.

Classe C^1

f est C^1 si f est différentiable sur Ω et $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est continue.
Critère en coordonnées : $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est C^1 si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues.
Méthode rapide : dérivées partielles continues $\Rightarrow$ C^1 $\Rightarrow$ différentiable.

Formule intégrale

Si f est C^1 et $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est C^1 :

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Si Ω est connexe par arcs :

$$\mathrm{d}f = 0 \text{ sur } \Omega \iff f \text{ constante sur } \Omega.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vecteurs tangents

$v \in T_xX$ s'il existe un arc γ dans X tel que

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma'(0) = v.$$

Si $X = \{y \in \Omega \mid g(y) = 0\}$, $g \in C^1$, $x \in X$, $\mathrm{d}g(x) \neq 0$, alors

$$T_xX = \operatorname{Ker} \mathrm{d}g(x).$$

Cas euclidien :

$$T_xX = \{h \mid \langle \nabla g(x), h\rangle = 0\}.$$

Optimisation : ordre 1

Point critique :

$$\mathrm{d}f(a) = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla f(a) = 0.$$

Si f admet un extremum local en un point intérieur a, alors a est critique.
Sous contrainte $g = 0$ avec $\mathrm{d}g(x) \neq 0$:

$$\mathrm{d}f(x) = \lambda \mathrm{d}g(x),$$

ou, en euclidien,

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$

Ne jamais oublier la contrainte $g(x) = 0$.

Classe C^k et Schwarz

f est de classe C^k si les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.
Théorème de Schwarz : si $f \in C^2$,

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

La différentielle seconde abstraite est hors programme, mais la hessienne est au programme pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Hessienne et Taylor-Young

Pour $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right).$$

Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Test hessien en dimension 2

Si a est critique et

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \qquad \Delta = rt - s^2,$$

alors :
- $\Delta > 0$, $r > 0$: minimum local strict ;
- $\Delta > 0$, $r < 0$: maximum local strict ;
- $\Delta < 0$: point selle ;
- $\Delta = 0$: test non concluant.

Exemples réflexes

1. $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$:

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = (2xy + ye^{xy})h + (x^2 + xe^{xy})k.$$

2. $F(x, y) = (x^2 + y, xy + \cos y)$:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x - \sin y \end{pmatrix}.$$

3. Sphère $\|x - a\|^2 = R^2$:

$$T_xS(a,R) = \{h \mid \langle x - a, h\rangle = 0\}.$$

Erreurs fréquentes

- Confondre dérivée directionnelle et différentielle.
- Oublier que $\mathrm{d}f(a)$ doit être linéaire.
- Utiliser un gradient pour une fonction vectorielle.
- Inverser l'ordre dans la chaîne : $J_g(f(a))J_f(a)$.
- Déduire un extremum de $\nabla f = 0$ sans étude complémentaire.
- Appliquer Lagrange sans vérifier $\mathrm{d}g(x) \neq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Optimisation – Prépa MP / MPI (2e année)

Extremums, points critiques, contraintes, hessienne et critères du second ordre

1. Vocabulaire

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $X \subset \Omega$.

— Min global en $a \in X$: $\forall x \in X,\ f(a) \leq f(x)$.

— Max global en $a \in X$: $\forall x \in X,\ f(a) \geq f(x)$.

— Min local en a : $\exists r > 0, \forall x \in X \cap B(a,r),\ f(a) \leq f(x)$.

— Max local : même définition avec $\geq$.

Global = sur tout X ; local = au voisinage du point.

2. Existence globale

Bornes atteintes. Si K est compact non vide et si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint son minimum et son maximum sur K.

En dimension finie : fermé + borné $\Rightarrow$ compact.

Méthode sur un compact

1. Justifier K compact non vide et f continue.
2. Étudier les points intérieurs : $\nabla f = 0$.
3. Étudier le bord / les contraintes.
4. Comparer les valeurs de f.

3. Premier ordre sans contrainte

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable, $a \in \Omega$.

Si f admet un extremum local en a, alors

$$\mathrm{d}f(a) = 0.$$

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien :

$$\nabla f(a) = 0.$$

Un tel point est un **point critique**.

Piège

$\nabla f(a) = 0$ est une condition nécessaire, pas suffisante. Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2$ a un point critique en $(0,0)$, mais pas d'extremum local.

4. Directions tangentes

Si $X \subset E$ et $a \in X$, un vecteur v est tangent à X en a s'il existe un arc γ dans X tel que

$$\gamma(0) = a, \qquad \gamma'(0) = v.$$

On note T_aX l'ensemble des vecteurs tangents.

Si $f_{|X}$ admet un extremum local en a et si f est différentiable en a, alors

$$\forall v \in T_aX, \qquad \mathrm{d}f(a) \cdot v = 0.$$

5. Contrainte régulière $g = 0$

Soit $X = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ avec g de classe C^1. Si $a \in X$ et $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, alors

$$T_aX = \operatorname{Ker} \mathrm{d}g(a).$$

Dans un espace euclidien :

$$T_aX = \{v \mid \langle \nabla g(a), v \rangle = 0\}.$$

Le gradient de g est normal à la contrainte.

6. Lagrange : une contrainte

Si f, g sont C^1, $X = \{g = 0\}$, $a \in X$, $\mathrm{d}g(a) \neq 0$, et si $f_{|X}$ admet un extremum local en a, alors

$$\mathrm{d}f(a) = \lambda \mathrm{d}g(a)$$

pour un réel λ. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien :

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

On résout donc

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x). \end{cases}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Hessienne

Pour $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, la hessienne est

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}.$$

Elle est symétrique par le théorème de Schwarz.
Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Si a est critique :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

8. Second ordre : conditions

Soit a point critique et f de classe C^2.

— Si $H_f(a)$ est définie positive : minimum local strict.
— Si $H_f(a)$ est définie négative : maximum local strict.
— Si $H_f(a)$ est indéfinie : point selle, pas d'extremum.

Conditions nécessaires : minimum local $\Rightarrow$ $H_f(a)$ positive ; maximum local $\Rightarrow$ $H_f(a)$ négative.

Cas dégénéré

Si la hessienne est seulement semi-définie, le critère peut ne pas conclure. Revenir à la définition, aux restrictions le long de droites, ou à un développement plus fin.

9. Critère rapide en dimension 2

Pour

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \qquad D = rt - s^2, \qquad T = r + t.$$

Si a est critique :

— $D > 0$ et $T > 0$: minimum local strict.
— $D > 0$ et $T < 0$: maximum local strict.
— $D < 0$: point selle.
— $D = 0$: critère muet.

Exemple classique

$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$.

$$\nabla f = (3x^2 - 3, 2y)$$

Points critiques : $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En $(1, 0)$: définie positive $\Rightarrow$ min local strict.
En $(-1, 0)$: indéfinie $\Rightarrow$ point selle.

Méthode sans contrainte

1. Calculer ∇f.
2. Résoudre $\nabla f = 0$.
3. Calculer H_f aux points critiques.
4. Conclure si possible avec le signe de la forme quadratique.
5. Si le critère échoue, étudier directement $f(a+h) - f(a)$.

Méthode sous contrainte

Pour optimiser f sur $g = 0$:

1. Vérifier f, g de classe C^1.
2. Vérifier $\nabla g \neq 0$ sur les candidats.
3. Résoudre $g = 0$ et $\nabla f = \lambda \nabla g$.
4. Comparer les valeurs si l'ensemble est compact.

Cercle unité

Pour $f(x, y) = xy$ sur $x^2 + y^2 = 1$:

$$(y, x) = \lambda(2x, 2y), \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

On obtient $y = x$ ou $y = -x$. Donc

$$\max xy = \frac{1}{2}, \qquad \min xy = -\frac{1}{2}.$$

À ne pas oublier

— Un extremum global sur compact peut être au bord.
— Lagrange donne des candidats, pas directement la conclusion.
— Ne pas appliquer $\nabla f = 0$ à un point non intérieur sans traiter la contrainte.
— Si $\det H = 0$, aucune conclusion automatique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Variables aléatoires discrètes

Prépa MP / MPI (2e année)

Cadre

Une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to E$ vérifie : $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et $(X = x) \in \mathcal{A}$ pour tout x.

Loi. La loi de X est déterminée par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $\sum_x \mathbb{P}(X = x) = 1$. On note $X \sim Y$ si X et Y ont la même loi.

Méthode loi : support → calcul de chaque masse → somme = 1.

Fonction d'une variable

Si $Y = f(X)$:

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x).$$

Il faut regrouper tous les antécédents de y.

Formule de transfert :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

si la famille est sommable.

Couples

Loi conjointe : $p_{x,y} = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_y p_{x,y}, \qquad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_x p_{x,y}.$$

Pour $Z = h(X, Y)$:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{h(x,y) = z} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Indépendance

X et Y sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

pour toutes valeurs possibles x, y.

Si $X \perp Y$, alors $f(X) \perp g(Y)$. Si X, Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k).$$

Espérance

Pour $X \geq 0$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x) \in [0, +\infty].$$

Pour X réelle/complexe : $X \in L^1$ si

$$\sum_x |x|\mathbb{P}(X = x) < +\infty.$$

Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x)$.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Propriétés : linéarité, positivité, croissance. Si $X, Y \in L^1$ indépendantes :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Variance et covariance

Si $X \in L^2$:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X), \qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Si $X, Y \in L^2$:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Si X, Y indépendantes, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Inégalités

Markov : si $X \geq 0$, $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Bienaymé–Tchebychev : si $X \in L^2$, $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Lois usuelles

Loi	Masse, espérance, variance
$\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$; $\mathbb{E} = p$; $\mathbb{V} = p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$; $\mathbb{E} = np$; $\mathbb{V} = np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	sur $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$; $\mathbb{E} = 1/p$; $\mathbb{V} = (1-p)/p^2$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$; $\mathbb{E} = \lambda$; $\mathbb{V} = \lambda$

Fonctions génératrices

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

La loi de X est déterminée par G_X.

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1), \quad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Si X, Y indépendantes : $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Loi	$G_X(t)$
$\mathcal{B}(p)$	$1-p+pt$
$\mathcal{B}(n,p)$	$(1-p+pt)^n$
$\mathcal{G}(p)$	$\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(t-1)}$

Réflexes de concours

— Toujours écrire le support avant les probabilités.
— Pour $f(X)$, regrouper les antécédents.
— Pour une somme, vérifier l'indépendance avant de convoler ou de multiplier les génératrices.
— Avant une espérance infinie, vérifier la sommabilité.
— $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ne prouve pas l'indépendance.
— Les variables à densité, l'espérance conditionnelle et les convergences p.s./en probabilité/en loi sont hors programme ici.

Mini-exemple

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ indépendantes :

$$G_{X+Y} = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Donc $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Lois discrètes

Prépa MP / MPI (2e année)

1. Identifier une loi discrète

Une loi discrète est donnée par son support et ses masses :

$$\mathbb{P}(X = x), \quad x \in X(\Omega), \qquad \sum_x \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Réflexe : toujours commencer par le support.

2. Lois de base

Loi	Support	Formule
$\mathcal{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1)=p$
$\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}p$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\lambda^k/k!$

Ici $q = 1-p$.

3. Loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k \geq 1.$$

Modèle : rang du premier succès dans des essais indépendants de même probabilité p.

Formules :

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n, \qquad \mathbb{P}(X \leq n) = 1-(1-p)^n.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n).$$

Attention : support $\mathbb{N}^*$, pas $\mathbb{N}$, pour le rang du premier succès.

4. Loi de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Modèle : nombre d'événements sur une période, lorsque les événements sont rares ou indépendants. Le paramètre λ représente le nombre moyen attendu.

Formules :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Somme : si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu).$$

5. Fonctions génératrices

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X=n)t^n.$$

$$G_X'(1) = \mathbb{E}(X), \quad G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

Donc

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2.$$

Usuelles :

$$G_{\mathcal{P}(\lambda)}(t) = e^{\lambda(t-1)},$$

$$G_{\mathcal{G}(p)}(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t} \quad \text{(support } \mathbb{N}^*\text{)}.$$

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

6. Choisir la bonne loi

Situation	Loi
Premier succès	$\mathcal{G}(p)$
Nombre de succès en n essais	$\mathcal{B}(n,p)$
Nombre d'événements sur une période	$\mathcal{P}(\lambda)$
Somme de comptages indépendants	Poisson, paramètres additionnés

7. Mini-exemples

Géométrique. Si $X \sim \mathcal{G}(0{,}25)$:

$$\mathbb{P}(X=4) = 0{,}75^3 \times 0{,}25, \quad \mathbb{E}(X) = 4.$$

Poisson. Si $X \sim \mathcal{P}(3)$:

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - 4e^{-3}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Méthodes types

Rang du premier succès :

$$(X = k) = \underbrace{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}_{\text{échecs}} \cap S_k,$$

donc $\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$ si les essais sont indépendants.

Queue géométrique : ne pas sommer ; utiliser directement

$$\mathbb{P}(X > n) = q^n.$$

Queue de Poisson : utiliser souvent le complément :

$$\mathbb{P}(X \geq r) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Calcul récursif Poisson :

$$p_0 = e^{-\lambda}, \qquad p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1}p_k.$$

9. Démonstrations à savoir refaire

— Vérifier $\sum_{k\geq 1} q^{k-1}p = 1$ pour $\mathcal{G}(p)$.

— Retrouver $\mathbb{E}(\mathcal{G}(p)) = 1/p$ avec la formule des queues.

— Retrouver $\mathbb{E}(\mathcal{P}(\lambda)) = \lambda$ par décalage d'indice.

— Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ pour obtenir $\mathbb{V}(\mathcal{P}(\lambda)) = \lambda$.

— Montrer que la somme de deux Poisson indépendantes est une Poisson par convolution.

10. Erreurs fréquentes

— Oublier le facteur $e^{-\lambda}$ dans la loi de Poisson.

— Confondre $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

— Écrire $\mathbb{P}(X = 0)$ pour une géométrique sur $\mathbb{N}^*$.

— Utiliser λ comme une probabilité : dans une Poisson, λ est un réel > 0, pas forcément < 1.

— Additionner les paramètres de lois de Poisson sans vérifier l'indépendance.

11. Exercices flash

1. Si $X \sim \mathcal{G}(0{,}4)$, alors

$$\mathbb{P}(X > 3) = 0{,}6^3, \quad \mathbb{E}(X) = 2{,}5.$$

2. Si $X \sim \mathcal{P}(2)$, alors

$$\mathbb{P}(X = 3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3}e^{-2}.$$

3. Si $X \sim \mathcal{P}(3)$, $Y \sim \mathcal{P}(4)$ indépendantes, alors

$$X + Y \sim \mathcal{P}(7).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Espérance et variance

Prépa MP / MPI (2e année) — Variables aléatoires discrètes

Espérance

Pour X discrète positive :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \in [0, +\infty].$$

Pour X réelle ou complexe : $X \in L^1$ si

$$\sum_x |x|\mathbb{P}(X = x) < +\infty, \quad \mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x).$$

Formule de transfert :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_x f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

si $\sum_x |f(x)|\mathbb{P}(X = x) < +\infty$.

Propriétés de l'espérance

Si $X, Y \in L^1$:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. Si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$. Si X, Y sont indépendantes et dans L^1 :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Linéarité : pas besoin d'indépendance. Produit : indépendance nécessaire en général.

Formule des queues

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n).}$$

Exemple : si $X \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Variance

$X \in L^2$ signifie $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Alors $X \in L^1$.

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)}$$

$\mathrm{V}(X) = 0$ ssi $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement. Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$. Variable centrée réduite :

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)} \quad (\sigma(X) > 0).$$

Cauchy-Schwarz

Si $X, Y \in L^2$:

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

En particulier $XY \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Covariance

Pour $X, Y \in L^2$:

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

Propriétés : symétrie, bilinéarité sur les variables centrées,

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{V}(X).$$

Si X, Y indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Réciproque fausse.

Variance d'une somme

Pour $X_1, \ldots, X_n \in L^2$:

$$\mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{V}(X_k) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Si les variables sont deux à deux décorrélées :

$$\boxed{\mathrm{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{V}(X_k).}$$

Indépendance deux à deux $\Rightarrow$ décorrélation.

Lois usuelles

Loi	Support/probas	$\mathbb{E}$	V
$\mathcal{B}(p)$	$0, 1$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$k \geq 1$, $(1-p)^{k-1}p$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$k \geq 0$, $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$	λ	λ

Fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

La loi est caractérisée par G_X.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_X(1)}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2}$$

Si X, Y indépendantes :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Génératrices usuelles

$$\mathcal{B}(p) : \quad G(t) = 1 - p + pt.$$

$$\mathcal{B}(n,p) : \quad G(t) = (1 - p + pt)^n.$$

$$\mathcal{G}(p) : \quad G(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t} \quad (|t| < 1/(1-p)).$$

$$\mathcal{P}(\lambda) : \quad G(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Inégalités

Markov : si $X \geq 0$ et $X \in L^1$, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}} \quad (a > 0).$$

Bienaymé-Tchebychev : si $X \in L^2$, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}}.$$

Loi faible des grands nombres : si X_i i.i.d., $X_1 \in L^2$, $m = \mathbb{E}(X_1)$, alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}(X_1)}{n\varepsilon^2} \to 0.$$

Méthodes rapides

Espérance. Support → loi → convergence absolue → somme.
Variance. Calculer $\mathbb{E}(X)$ puis $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Somme. Utiliser les covariances ; si indépendance, les variances s'additionnent.
Comptage. Écrire $N = \sum \mathbf{1}_{A_k}$:

$$\mathbb{E}(N) = \sum \mathbb{P}(A_k).$$

Pièges fréquents

- Pour support infini, ne pas oublier de prouver l'existence de $\mathbb{E}(X)$ ou $\mathrm{V}(X)$.
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ demande l'indépendance.
- $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$: le décalage b ne change pas la variance.
- $G_X''(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$, pas $\mathbb{E}(X^2)$.
- Covariance nulle n'implique pas indépendance.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Séries génératrices

Prépa MP / MPI (2e année)

Définition

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\boxed{G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.}$$

La série entière a un rayon ≥ 1 car, pour $|t| \leq 1$,

$$\sum |\mathbb{P}(X = n) t^n| \leq \sum \mathbb{P}(X = n) = 1.$$

Donc $G_X(1) = 1$.

Lecture de la loi

La loi de X est caractérisée par G_X.

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.}$$

En pratique : développer $G_X(t)$ sous la forme $\sum a_n t^n$, puis lire $\mathbb{P}(X = n) = a_n$.

Moments

Sous réserve d'existence des moments :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G_X'(1)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2.}$$

Si le rayon vaut 1, les dérivées en 1 sont comprises comme des dérivées à gauche.

Somme indépendante

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).}$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes :

$$\boxed{G_{X_1 + \cdots + X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}.}$$

Attention : l'indépendance est indispensable.

Lois usuelles

Loi	Génératrice
Certaine a	$G(t) = t^a$
Bernoulli p	$G(t) = 1 - p + pt$
Binomiale (n, p)	$G(t) = (1 - p + pt)^n$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$ **sur** $\mathbb{N}^*$	$G(t) = \dfrac{pt}{1 - (1-p)t}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$G(t) = e^{\lambda(t-1)}$

Convention géométrique

En MP/MPI, $\mathcal{G}(p)$ désigne le plus souvent le **rang du premier succès** :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Donc

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}.$$

Le nombre d'échecs avant le premier succès a pour génératrice

$$\frac{p}{1 - (1-p)t}.$$

Méthodes express

Calculer une loi :

1. obtenir $G_X(t)$;
2. développer en série entière ;
3. identifier le coefficient de t^n.

Calculer des moments :

1. calculer G_X' et G_X'' ;
2. évaluer en 1 ;
3. appliquer les formules de moments.

Calculer une somme indépendante :

1. multiplier les génératrices ;
2. reconnaître une loi ou extraire les coefficients.

Exemple 1 : Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$:

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Alors

$$G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}, \quad G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.}$$

Exemple 2 : somme de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$G_{X+Y}(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Donc

$$\boxed{X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu).}$$

Exemple 3 : Bernoulli vers binomiale

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$G_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = (1 - p + pt)^n.$$

Donc

$$\boxed{X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pièges à éviter

— Ne pas confondre $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ avec $\mathbb{E}(e^{tX})$.

— Ne pas oublier le support : $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ change la formule.

— Ne pas écrire $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sans indépendance.

— Pour la variance, ne pas oublier le $+G'_X(1)$:

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

Rédaction type

"Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa génératrice est $G_X(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Par unicité du développement en série entière, le coefficient de t^n donne $\mathbb{P}(X = n)$."

"Comme X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$."

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Mathématiques — Prépa MP / MPI (2e année)

Fiche de révision — Loi faible des grands nombres

1. Markov

Si $Y \geq 0$ est intégrable, alors pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

Usages immédiats :

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}, \qquad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}$$

si les quantités existent.

2. Bienaymé–Tchebychev

Si X admet une variance finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Preuve à connaître : appliquer Markov à

$$Y = (X - \mathbb{E}(X))^2.$$

3. Moyenne empirique

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, de même loi, avec

$$\mathbb{E}(X_1) = m, \qquad \mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 < +\infty.$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Alors

$$\mathbb{E}(M_n) = m, \qquad \mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Point clé : l'écart-type de M_n vaut $\sigma/\sqrt{n}$.

4. Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires discrètes de variance finie, avec

$$m = \mathbb{E}(X_1), \quad \sigma^2 = \mathbb{V}(X_1), \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Majoration exigible :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

5. Schéma de Bernoulli

Si $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ sont indépendantes et

$$F_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

alors

$$\mathbb{E}(F_n) = p, \qquad \mathbb{V}(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Interprétation : la fréquence empirique approche la probabilité p.

6. Preuve type à refaire vite

Pour établir la loi faible :

1. Poser $M_n = S_n/n$.
2. Calculer $\mathbb{E}(M_n) = m$.
3. Utiliser l'indépendance :

$$\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

4. Appliquer Bienaymé–Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

5. Conclure car le majorant tend vers 0.

7. Taille d'échantillon

Pour garantir

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \alpha,$$

il suffit que

$$\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq \alpha, \quad \text{donc} \quad n \geq \frac{\sigma^2}{\alpha\varepsilon^2}.$$

Pour une fréquence Bernoulli sans connaître p :

$$n \geq \frac{1}{4\alpha\varepsilon^2}.$$

Exemple : $\varepsilon = 0{,}02$, $\alpha = 0{,}05$ donne $n \geq 12500$.

8. Exemple classique

Pour un dé équilibré, $X \in \{1, \dots, 6\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{35}{12}.$$

Si M_n est la moyenne de n lancers indépendants,

$$\mathbb{P}\left(\left|M_n - \frac{7}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{35}{12n\varepsilon^2}.$$

Donc cette probabilité tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

9. Pièges fréquents

- Markov s'applique à une variable positive.
- Tchebychev exige une variance finie.
- L'indépendance sert au calcul de la variance de la somme.
- La borne de Tchebychev n'est pas une probabilité exacte.
- Une borne supérieure à 1 est vraie mais inutile.
- La loi faible n'est pas une convergence déterministe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Mini-algorithme concours

Question : montrer qu'une moyenne empirique approche une constante.
Réflexe : espérance + variance + Tchebychev.
Phrase finale :

$$0 \leq \mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0,$$

donc la moyenne empirique vérifie la loi faible.

11. Exemple Poisson

Si $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda)$ sont indépendantes et de même loi, alors

$$\mathbb{E}(X_k) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X_k) = \lambda.$$

Pour $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$:

$$\mathbb{P}(|M_n - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

Exemple : $\lambda = 3$, $n = 100$, $\varepsilon = 0{,}5$ donne

$$\mathbb{P}(|M_{100} - 3| \geq 0{,}5) \leq 0{,}12.$$

12. Rédaction attendue

Ne pas écrire seulement « par la loi des grands nombres ». En MP/MPI, on doit souvent retrouver la borne :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Mentionner clairement : indépendance, même loi, variance finie, puis application de Bienaymé–Tchebychev.

13. Hors de cette fiche

La loi faible ne remplace pas les résultats plus fins comme la loi forte ou le théorème central limite. Ici, le résultat exigible est uniquement la convergence des probabilités d'écart vers 0 et la majoration en $1/n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).