MathLvl

Fiches de révision de maths

Prépa MPSI / MP2I (1re année)

27 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Raisonnement et ensembles p. 2
2. Calcul algébrique p. 4
3. Trigonométrie p. 6
4. Fonctions usuelles p. 8
5. Limites et continuité p. 10
6. Dérivabilité p. 12
7. Convexité p. 14
8. Suites numériques p. 16
9. Primitives et intégrales p. 18
10. Équations différentielles simples p. 20
11. Analyse asymptotique p. 22
12. Fonctions de deux variables p. 24
13. Nombres complexes p. 26
14. Arithmétique dans Z p. 28
15. Structures algébriques p. 30
16. Polynômes p. 32
17. Fractions rationnelles p. 34
18. Matrices p. 36
19. Systèmes linéaires p. 38
20. Espaces vectoriels p. 40
21. Applications linéaires p. 42
22. Déterminants p. 44
23. Espaces préhilbertiens p. 46
24. Dénombrement p. 48
25. Probabilités finies p. 50
26. Variables aléatoires finies p. 52
27. Espérance et variance p. 54

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Fiche de révision – Raisonnement et ensembles

Prépa MPSI / MP2I

À retenir

Cette fiche rassemble les réflexes attendus : manipuler correctement les quantificateurs, choisir un mode de preuve adapté, rédiger une inclusion ou une égalité d'ensembles, utiliser applications et relations sans ambiguïté. L'étude systématique de la logique formelle et de la théorie des ensembles n'est pas l'objectif.

1. Logique : formules à connaître

Connecteurs

Non	$\neg P$ est vraie exactement quand P est fausse.
Et	$P \wedge Q$: les deux propositions sont vraies.
Ou	$P \vee Q$: au moins l'une des deux est vraie.
Implication	$P \Longrightarrow Q$ signifie : si P est vraie, alors Q est vraie.
Équivalence	$P \Longleftrightarrow Q$ signifie : $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$.

Implication

$$P \Longrightarrow Q \quad \equiv \quad \neg P \vee Q, \qquad \neg(P \Longrightarrow Q) \quad \equiv \quad P \wedge \neg Q.$$

La contraposée de $P \Longrightarrow Q$ est $\neg Q \Longrightarrow \neg P$: elle est équivalente. La réciproque $Q \Longrightarrow P$ ne l'est pas en général.

Quantificateurs

Universel	$\forall x \in E,\ P(x)$: tout élément de E vérifie P.
Existentiel	$\exists x \in E,\ P(x)$: il existe au moins un élément de E vérifiant P.
Unicité	$\exists! x \in E,\ P(x)$: existence et unicité.

Négation des quantificateurs

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ \neg P(x),$$

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \neg P(x).$$

L'ordre des quantificateurs est essentiel : $\forall x\, \exists y$ n'a pas le même sens que $\exists y\, \forall x$.

2. Modes de raisonnement

Preuve directe

Pour prouver $P \Longrightarrow Q$, on suppose P vraie, puis on établit Q. C'est le raisonnement par défaut.

Contraposée

Pour prouver $P \Longrightarrow Q$, on peut prouver $\neg Q \Longrightarrow \neg P$. Utile quand $\neg Q$ est plus exploitable que P.

Absurde

Pour prouver P, on suppose $\neg P$, puis on obtient une contradiction. La contradiction peut être A et $\neg A$, ou une impossibilité connue.

Disjonction des cas

On découpe la preuve selon des cas qui couvrent toutes les situations possibles, puis on conclut dans chaque cas.

Analyse-synthèse

Pour chercher les objets vérifiant une propriété :

1. **Analyse** : on suppose l'objet solution et on déduit sa forme possible.
2. **Synthèse** : on vérifie que les candidats trouvés conviennent réellement.

Existence et unicité

Pour montrer $\exists! x \in E,\ P(x)$:

— existence : construire ou exhiber un x qui convient ;
— unicité : montrer que deux solutions quelconques sont égales.

Récurrence

Pour prouver $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. initialisation : prouver $P(n_0)$;
2. hérédité : supposer $P(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$ et prouver $P(n+1)$;
3. conclusion : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence forte : pour prouver $P(n+1)$, on peut supposer $P(k)$ vraie pour tout $k \in \{n_0, \dots, n\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Ensembles : vocabulaire minimal

Appartenance, inclusion, égalité

$x \in E$	x est un élément de E.
$A \subset E$	tout élément de A appartient à E.
$A = E$	double inclusion : $A \subset E$ et $E \subset A$.
$\varnothing$	ensemble vide.
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de E.

Réflexe de rédaction

Pour prouver $A \subset B$: prendre $x \in A$ quelconque et montrer $x \in B$. Pour prouver $A = B$: faire les deux inclusions.

Opérations sur les ensembles

Dans un ensemble de référence E :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\},$$
$$E \setminus A = A^{\mathrm{c}}, \qquad A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}}.$$

Lois de De Morgan

$$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}, \qquad (A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}.$$

Le complémentaire dépend toujours de l'ensemble de référence.

Produit cartésien

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}.$$

Un élément de $E \times F$ est un couple ordonné : en général $(x, y) \neq (y, x)$.

4. Applications

Définitions

Une application $f : E \to F$ associe à chaque $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$. E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée.

Image directe	$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ pour $A \subset E$.
Image réciproque	$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ pour $B \subset F$.
Composition	si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors $g \circ f : E \to G$.
Identité	$\mathrm{id}_E : E \to E$, $x \mapsto x$.

Notation f^{-1}

Pour une partie $B \subset F$, $f^{-1}(B)$ désigne une image réciproque même si f n'est pas bijective. Ce n'est pas nécessairement une fonction réciproque.

Injection, surjection, bijection

Injective	$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$. Deux éléments distincts ont des images distinctes.
Surjective	$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$. Tout élément de l'arrivée est atteint.
Bijective	injective et surjective ; équivaut à : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.

5. Relations

Une relation binaire sur E est une propriété portant sur deux éléments de E, notée par exemple $x\ R\ y$.

Réflexive	$\forall x \in E,\ xRx$.
Symétrique	$xRy \Longrightarrow yRx$.
Antisymétrique	$(xRy \text{ et } yRx) \Longrightarrow x = y$.
Transitive	$(xRy \text{ et } yRz) \Longrightarrow xRz$.

Relations classiques

Une relation d'équivalence est réflexive, symétrique et transitive. Une relation d'ordre est réflexive, antisymétrique et transitive. L'ordre est total si deux éléments quelconques sont toujours comparables.

6. Erreurs fréquentes à éviter

- Confondre implication et équivalence : prouver seulement $P \Longrightarrow Q$ ne prouve pas $P \Longleftrightarrow Q$.
- Remplacer une implication par sa réciproque sans justification.
- Oublier de changer les quantificateurs en niant une phrase.
- Intervertir $\forall$ et $\exists$ sans vérifier le sens.
- Écrire un complémentaire sans préciser l'ensemble de référence.
- Confondre image directe $f(A)$ et image réciproque $f^{-1}(B)$.
- Utiliser f^{-1} comme fonction réciproque sans avoir montré que f est bijective.
- Déclarer une récurrence sans initialisation, hérédité et conclusion explicites.

7. Mini-checklist avant de rédiger

1. Quels sont les objets et leurs ensembles d'appartenance ?
2. Quelle est l'hypothèse ? Quelle est la conclusion exacte ?
3. Faut-il prouver une implication, une équivalence, une inclusion, une égalité ?
4. Le mode de raisonnement choisi est-il annoncé et valide ?
5. Les quantificateurs sont-ils dans le bon ordre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Calcul algébrique

Sommes, produits, coefficients binomiaux, manipulations algébriques

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

Conventions

$$\sum_{k\in\varnothing} a_k = 0, \qquad \prod_{k\in\varnothing} a_k = 1.$$

Indice muet : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$.
$a, b = \{k \in \mathbb{Z} \mid a \le k \le b\}$.

Sommes : règles

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k + \mu \sum_{k=p}^{q} b_k.$$

Si $p \le q$,

$$\sum_{k=p}^{q} c = (q-p+1)c.$$

Découpage :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k.$$

Sommes classiques

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & q = 1, \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Changement d'indice

Si $j = k + c$, alors

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+c}^{q+c} a_{j-c}.$$

Toujours transformer : ancienne borne, nouvelle borne, terme général.

Télescopage additif

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

Exemple :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Produits

$$\prod_{k=p}^{q}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)\left(\prod_{k=p}^{q} b_k\right).$$

Si $p \le q$,

$$\prod_{k=p}^{q} c = c^{q-p+1}.$$

Factorielle :

$$0! = 1, \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

Télescopage multiplicatif

Si les termes sont non nuls,

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{q+1}}{u_p}.$$

Exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1.$$

Coefficients binomiaux

Pour $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \le k \le n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Valeurs :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Symétrie :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (n \ge 1).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Formule du binôme

Pour a, b réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Cas utiles :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Avec un facteur k

À partir de $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$, dériver :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Identités algébriques

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3,$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Différence de puissances :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Factoriser / simplifier

Chercher dans l'ordre : facteur commun, identité remarquable, regroupement, puissance commune.
On simplifie des **facteurs**, jamais des termes isolés :

$$\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2 \quad (x \neq 1),$$

mais

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \neq 1.$$

Pièges fréquents

- Oublier que n est fixe dans $\sum_{k=1}^{n}(n+k)$.
- Changer d'indice sans changer les bornes.
- Utiliser la formule géométrique avec $q = 1$.
- Diviser par une expression qui peut être nulle.
- Perdre les valeurs interdites après simplification.

Mini-checklist

Avant de rendre un calcul :

1. les bornes sont-elles correctes ?
2. l'indice est-il bien muet ?
3. les cas $q = 1$, $n = 0$, produit vide sont-ils traités ?
4. les dénominateurs sont-ils non nuls ?
5. le résultat est-il plausible pour $n = 1$ ou $n = 2$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Trigonométrie

Cercle trigonométrique, formules d'addition, duplication, tangente et équations – MPSI / MP2I

1. Cercle trigonométrique

À tout $x \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(x)$ du cercle unité :

$$M(x) = (\cos x, \sin x), \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Congruence :

$$a \equiv b\ [2\pi] \iff a = b + 2k\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Même point sur le cercle $\Rightarrow$ mêmes cos et sin.

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

2. Valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$

Par symétrie et périodicité, ce tableau donne toutes les valeurs usuelles.

3. Symétries à savoir retrouver

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x.$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

4. Fonctions cos et sin

$$-1 \le \cos x \le 1, \qquad -1 \le \sin x \le 1.$$
$$(\cos)' = -\sin, \qquad (\sin)' = \cos.$$

Inégalité fondamentale :

$$|\sin x| \le |x| \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Addition et soustraction

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

6. Duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\boxed{\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$$
$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$$

7. Produits et factorisations

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a + b) + \cos(a - b)\big),$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a - b) - \cos(a + b)\big),$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a + b) + \sin(a - b)\big).$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2},$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p + q}{2}\sin\frac{p - q}{2},$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p + q}{2}\cos\frac{p - q}{2}.$$

8. Tangente

Domaine :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \qquad \tan(-x) = -\tan x.$$
$$(\tan)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Formules :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$
$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Toujours vérifier les conditions d'existence.

9. Angle moitié

Si $u = \tan(t/2)$, alors

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \qquad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2},$$
$$\tan t = \frac{2u}{1 - u^2}$$

lorsque les expressions sont définies.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Équations de base

$$\cos x = \cos a \iff x \equiv a \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -a \ [2\pi].$$

$$\sin x = \sin a \iff x \equiv a \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - a \ [2\pi].$$

$$\tan x = \tan a \iff x \equiv a \ [\pi].$$

11. Méthode de résolution

1. Mettre sous forme $\sin u = c$, $\cos u = c$ ou $\tan u = c$.
2. Résoudre sur une période avec le cercle.
3. Ajouter la période adaptée : 2π ou π.
4. Intersecter avec l'intervalle demandé.

12. Erreurs classiques

- $\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b$.
- $\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$.
- Tangente : période π, pas 2π.
- Ne jamais diviser par $\cos x$ sans vérifier $\cos x \neq 0$.
- Pour $\sin x = \sin a$ et $\cos x = \cos a$, il y a souvent deux familles de solutions.

13. Exemples rapides

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi].$$

$$\tan x = -1 \Rightarrow x \equiv -\frac{\pi}{4} \ [\pi].$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ sur } [0, 2\pi[\Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Fonctions usuelles

Logarithme, exponentielle, puissances, fonctions circulaires réciproques et hyperboliques – MPSI / MP2I

1. Logarithme népérien

Domaine : $x > 0$. Image : $\mathbb{R}$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \ln 1 = 0, \qquad \ln \mathrm{e} = 1.$$

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Pour $x, y > 0$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x.$$

Erreur à éviter

$$\ln(x+y) \neq \ln x + \ln y.$$

Toujours vérifier que l'argument du logarithme est strictement positif.

2. Exponentielle

Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $\mathbb{R}_+^*$.

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x, \qquad \mathrm{e}^{\ln x} = x \ (x > 0).$$

exp est strictement croissante.

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b, \quad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}, \quad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}.$$

3. Inégalités fondamentales

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln(1+x) \leq x \qquad (x > -1).$$

Égalité dans les deux cas seulement pour $x = 0$. Conséquence utile : pour $x > 0$,

$$\ln x \leq x - 1.$$

4. Puissances

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$:

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$

Règles, pour $x, y > 0$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Dérivée :

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Variations sur $\mathbb{R}_+^*$: croissante si $\alpha > 0$, constante si $\alpha = 0$, décroissante si $\alpha < 0$.

Domaine des puissances

En général, x^α impose $x > 0$. Seules les puissances entières sont définies sur tout $\mathbb{R}$.

5. Logarithmes usuels

Pour $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad (\log_a)'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Cas à connaître :

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}, \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}.$$

6. Croissances comparées

Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} = 0.$$

Donc, à $+\infty$:

$$\ln x \ll x^\alpha \ll \mathrm{e}^{\beta x}.$$

Au voisinage de 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

7. Fonctions circulaires réciproques

$$\mathrm{Arcsin} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\mathrm{Arcsin})'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\mathrm{Arccos} : [-1,1] \to [0,\pi], \quad (\mathrm{Arccos})'x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad (\mathrm{Arctan})'x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Variations : Arcsin et Arctan croissantes ; Arccos décroissante.

8. Identités réciproques

Pour $x \in [-1,1]$:

$$\sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = x, \qquad \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(\mathrm{Arctan}\, x) = x.$$

Mais :

$$\mathrm{Arcsin}(\sin x) = x$$

seulement si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. De même, $\mathrm{Arccos}(\cos x) = x$ seulement si $x \in [0, \pi]$.

$$\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Parité : sh impaire, ch paire, th impaire.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Dérivées :

$$(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch}, \qquad (\operatorname{ch})' = \operatorname{sh}, \qquad (\operatorname{th})' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2.$$

sh et th sont croissantes ; ch a pour minimum 1 en 0.

Hors programme

Les fonctions hyperboliques réciproques argsh, argch, argth sont hors programme.

10. Méthode type

Pour une équation ou une étude :

1. domaine de définition ;
2. simplifications algébriques ;
3. dérivée et signe ;
4. limites ;
5. vérification des solutions.

Pour Arcsin, Arccos, Arctan, ne jamais oublier l'intervalle image.

Checklist erreurs fréquentes

— oublier $u > 0$ dans $\ln u$;
— oublier $u \in [-1, 1]$ dans $\operatorname{Arcsin} u$ ou $\operatorname{Arccos} u$;
— simplifier abusivement $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$;
— utiliser x^α avec $x < 0$ et α non entier ;
— confondre domination et équivalence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Limites et continuité

Limites de fonctions, continuité, TVI et applications – MPSI / MP2I

1. Limite finie en un point

Soit a adhérent au domaine de f. Dire que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

signifie que $f(x)$ devient arbitrairement proche de ℓ quand x devient proche de a.
Forme quantifiée usuelle :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad 0 < |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \le \varepsilon.$$

Si elle existe, la limite est unique. Si la limite est finie, f est bornée au voisinage de a.

2. Limites unilatérales

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Si a est intérieur au domaine :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell.$$

Exemple : $\lfloor x \rfloor$ n'a pas de limite en 1 car les limites gauche et droite valent 0 et 1.

3. Limites infinies et à l'infini

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

signifie : pour tout $M \in \mathbb{R}$, $f(x) \ge M$ pour x assez proche de a.
À l'infini :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$$

signifie : pour x assez grand, $f(x)$ est proche de ℓ.
Classiques :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

4. Opérations sur les limites

Si $f \to \ell$ et $g \to m$:

$$f+g \to \ell+m, \qquad fg \to \ell m, \qquad \frac{f}{g} \to \frac{\ell}{m} \quad (m \neq 0).$$

Composition : si $f(x) \to b$ et $g(y) \to \ell$ quand $y \to b$, alors

$$g(f(x)) \to \ell.$$

Formes indéterminées

Ne pas conclure directement dans les cas :

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Outils : factorisation, mise au même dénominateur, quantité conjuguée, encadrement.

5. Inégalités et encadrement

Passage à la limite : si $f \le g$ au voisinage de a, $f \to \ell$ et $g \to m$, alors

$$\ell \le m.$$

Une inégalité stricte devient seulement large à la limite.
Encadrement : si

$$g(x) \le f(x) \le h(x), \qquad g(x) \to \ell, \qquad h(x) \to \ell,$$

alors $f(x) \to \ell$.
Exemple :

$$-|x| \le x\sin(1/x) \le |x| \Rightarrow x\sin(1/x) \to 0.$$

6. Limite monotone

Une fonction monotone sur $]a,b[$ admet des limites finies à gauche et à droite en tout point intérieur, et des limites finies ou infinies aux bornes.
Cas utile : croissante + majorée au voisinage de la borne $\Rightarrow$ limite finie.

7. Continuité en un point

f est continue en a lorsque

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

À droite ou à gauche :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Prolongement : si f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$, alors poser $f(a) = \ell$ rend la fonction continue en a.

8. Fonctions continues

Continues sur leur domaine : polynômes, fractions rationnelles, exp, ln, puissances, fonctions trigonométriques, fonctions circulaires réciproques.
Stabilité : somme, produit, quotient si le dénominateur ne s'annule pas, composition.

Prouver une continuité

1. Préciser l'intervalle de travail.
2. Utiliser fonctions usuelles + opérations.
3. Pour une fonction par morceaux, vérifier les raccords.
4. Aux bornes, utiliser les limites unilatérales.

9. TVI

Si f est continue sur $[a,b]$, alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte :

$$\forall k \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b), \quad \exists c \in [a,b],\ f(c) = k.$$

Le TVI donne une existence, pas une unicité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Résoudre $f(x) = k$

Existence : continuité + TVI.
Existence et unicité :
1. f continue sur I ;
2. f strictement monotone sur I ;
3. $k \in f(I)$.

Alors $f(x) = k$ admet une unique solution.

10. Segment et bornes atteintes

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists u, v \in [a, b], \quad f(u) = \min_{[a,b]} f, \quad f(v) = \max_{[a,b]} f.$$

Donc $f([a, b]) = [m, M]$. Attention : faux en général sur un intervalle ouvert.

11. Bijection continue monotone

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Sa réciproque f^{-1} est continue et a le même sens de variation que f.

12. Fonctions complexes

Si $f = u + \mathrm{i}v : I \to \mathbb{C}$, alors

$$f(x) \to \alpha + \mathrm{i}\beta \iff u(x) \to \alpha \text{ et } v(x) \to \beta.$$

Même critère pour la continuité.

Erreurs fréquentes

— appliquer le TVI sans continuité sur tout le segment ;
— oublier que TVI $\neq$ unicité ;
— ignorer une limite à gauche ou à droite ;
— diviser par une expression pouvant s'annuler ;
— affirmer qu'une borne est atteinte sur un intervalle ouvert.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Dérivabilité

Nombre dérivé, Rolle, accroissements finis et variations – MPSI / MP2I

1. Nombre dérivé

f est dérivable en a si le taux d'accroissement admet une limite finie :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Dérivées unilatérales : remplacer $h \to 0$ par $h \to 0^+$ ou $h \to 0^-$. En un point intérieur : dérivable $\Leftrightarrow$ dérivées gauche/droite existent et sont égales.

2. DL d'ordre 1

f est dérivable en a si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \to 0.$$

Conséquence : dérivable $\Rightarrow$ continue. Tangente en a :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

À retenir

Continue n'implique pas dérivable. Exemple : $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0.

3. Règles de dérivation

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si $g \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Composition :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

Réciproque : si $f'(a) \neq 0$,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

4. Dérivées usuelles

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = 1+\tan^2 x.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

5. Extremum local

Si a est intérieur, f dérivable en a et f admet un extremum local en a, alors

$$f'(a) = 0.$$

Un point critique est un zéro de la dérivée. Attention : $f'(a) = 0$ ne suffit pas à avoir un extremum. Exemple : x^3 en 0.

6. Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et

$$f(a) = f(b),$$

alors

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0.$$

Usage : entre deux zéros distincts de f, il existe un zéro de f'.

7. Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Géométrie : une tangente est parallèle à la corde. Cinématique : une vitesse instantanée égale la vitesse moyenne.

8. Inégalité des accroissements finis

Si $|f'| \leq K$ sur un intervalle I, alors

$$\forall x, y \in I, \quad |f(y) - f(x)| \leq K|y-x|.$$

On dit que f est K-lipschitzienne. Si $K < 1$, f est contractante.

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour montrer $u_n \to \ell$:
1. prouver $f(I) \subset I$;
2. résoudre $f(\ell) = \ell$;
3. montrer $|f'| \leq k < 1$;
4. utiliser $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$.

Alors $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

9. Dérivée et variations

Sur un intervalle I :

$$f' = 0 \iff f \text{ constante.}$$

$$f' \geq 0 \iff f \text{ croissante}, \qquad f' \leq 0 \iff f \text{ décroissante.}$$

Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante. Si $f' < 0$, alors f est strictement décroissante.

Nuance stricte

$f' > 0$ est suffisante, pas nécessaire : x^3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en 0.

10. Limite de la dérivée

Si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et

$$\lim_{x\to a,\ x\neq a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Si la limite vaut $\pm\infty$, on obtient une tangente verticale possible, mais pas de dérivée finie.

11. Classe $\mathcal{C}^k$

f est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue. Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

12. Fonctions complexes

Pour $f = u + iv$:

$$f' = u' + iv'.$$

Rolle et l'EAF sont faux en général dans $\mathbb{C}$; l'IAF reste valable pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$ si $|f'| \leq K$.

Réflexes d'exercice

- Dérivabilité en un point : calculer le taux d'accroissement.
- Existence de $f'(c) = 0$: penser à Rolle.
- Lien variation globale/dérivée : penser EAF.
- Majorer $|f(y) - f(x)|$: penser IAF.
- Variations : étudier le signe de f'.

Erreurs classiques

Ne pas oublier les hypothèses : continuité sur $[a, b]$, dérivabilité sur $]a, b[$. Ne pas appliquer Rolle/EAF à une fonction complexe. Ne pas confondre point critique et extremum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Convexité

Fonctions convexes, Jensen, pentes, tangentes et applications – MPSI / MP2I

1. Partie convexe

Une partie A d'un espace vectoriel réel est convexe si

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

Dans $\mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

2. Fonction convexe

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

pour tous $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$. Concave $\Leftrightarrow -f$ convexe : le sens est inversé.

Sens géométrique

Convexe : graphe sous ses cordes.
Concave : graphe au-dessus de ses cordes.
Convexe dérivable : graphe au-dessus de ses tangentes.

3. Jensen

Si f est convexe, $x_i \in I$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Si f est concave, le sens est inversé.

Utiliser Jensen

Vérifier : intervalle, convexité/concavité, coefficients positifs, somme 1. Écrire l'inégalité complète avant de simplifier.

4. Pentes des cordes

Pour $a < x < b$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

f est convexe $\Leftrightarrow$ les pentes des cordes sont croissantes.

5. Critère avec f'

Si f est dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante},$$
$$f \text{ concave} \iff f' \text{ décroissante}.$$

Si f' est strictement croissante, f est strictement convexe.

6. Tangente

Si f est convexe et dérivable,

$$\forall a, x \in I, \qquad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Si f est concave et dérivable,

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a).$$

7. Critère avec f''

Si f est deux fois dérivable :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0,$$
$$f \text{ concave} \iff f'' \leq 0.$$

Si $f'' > 0$, alors f est strictement convexe. Ce critère est suffisant, pas nécessaire.

8. Fonctions usuelles

- x^2, e^x, $-\ln x$: convexes.
- $\ln x$, $\sqrt{x}$: concaves sur $]0, +\infty[$.
- x^α sur $]0, +\infty[$: convexe si $\alpha \leq 0$ ou $\alpha \geq 1$, concave si $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Fonction affine : convexe et concave.

Prouver une convexité

Priorité : calculer f''. Sinon, montrer que f' est croissante. Si la fonction n'est pas régulière, utiliser la définition ou les pentes.

9. Inégalités classiques

Par tangente ou Jensen :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq 1 + x.$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x \leq x - 1.$$

$$\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Pour $x_i > 0$:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Minimum convexe

Si f est convexe dérivable et $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a).$$

Si f est strictement convexe, ce minimum est unique lorsqu'il existe.

10. Points d'inflexion

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité. Un zéro de f'' ne suffit pas : il faut un changement de signe de f'' autour du point.

Erreurs classiques

- Jensen sans coefficients positifs ou sans somme 1.
- Inverser convexe et concave.
- Oublier l'intervalle d'étude.
- Croire que $f''(a) = 0$ implique un point d'inflexion.
- Croire que le produit de convexes est toujours convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

11. Cas d'égalité

Fonction strictement convexe + Jensen : égalité seulement si les x_i de poids non nul sont égaux.
Tangente d'une fonction strictement convexe : égalité au point de tangence.

Choisir la bonne méthode

— Moyenne pondérée : Jensen.
— Comparaison à une droite : tangente.
— Minoration globale : fonction convexe + point critique.
— Étude graphique : signe de f''.

12. Exemples rapides

— $x^2 \leq x$ sur $[0,1]$: corde de x^2 entre 0 et 1.
— $\sqrt{(a+b)/2} \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$: concavité de $\sqrt{\cdot}$.
— $\mathrm{e}^{(x+y)/2} \leq (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)/2$: Jensen avec e^x.

À ne pas écrire

$f'' \geq 0$ n'implique pas $f'' > 0$.
$f''(a) = 0$ n'est pas un point d'inflexion sans changement de signe.
Une fonction convexe n'est pas forcément croissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Suites numériques

Convergence, monotonie, suites adjacentes et récurrences – MPSI / MP2I

1. Vocabulaire

Suite réelle : application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, notée (u_n).
Majorée : $\exists M,\ \forall n,\ u_n \leq M$.
Minorée : $\exists m,\ \forall n,\ m \leq u_n$.
Bornée : majorée et minorée, équiv. $(|u_n|)$ majorée.
Croissante : $u_n \leq u_{n+1}$. Décroissante : $u_{n+1} \leq u_n$.

2. Limite finie

$u_n \to \ell$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est bornée. La limite est unique.

Attention

Bornée $\not\Rightarrow$ convergente : $(-1)^n$ est bornée mais diverge.
Monotone $\not\Rightarrow$ convergente dans $\mathbb{R}$: $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

3. Limites infinies

$u_n \to +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N, \forall n \geq N, \quad u_n \geq A.$$

Définition analogue pour $-\infty$ avec $u_n \leq A$.

4. Opérations

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to m$:

$$\alpha u_n + \beta v_n \to \alpha \ell + \beta m, \quad u_n v_n \to \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors $u_n / v_n \to \ell / m$.

5. Ordre et encadrement

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang et $u_n \to \ell$, $v_n \to m$, alors $\ell \leq m$.
Si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $u_n, v_n \to \ell$, alors $w_n \to \ell$.
Si $|u_n - \ell| \leq a_n$ et $a_n \to 0$, alors $u_n \to \ell$.

6. Limite monotone

Toute suite croissante majorée converge vers $\sup\{u_n\}$.
Toute suite décroissante minorée converge vers $\inf\{u_n\}$.
Croissante non majorée $\Rightarrow u_n \to +\infty$.
Décroissante non minorée $\Rightarrow u_n \to -\infty$.

7. Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
— l'une croît, l'autre décroît ;
— $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang ;
— $v_n - u_n \to 0$.
Alors elles convergent vers la même limite.

8. Suites extraites

Suite extraite : $(u_{\varphi(n)})$ avec φ strictement croissante.
Si $u_n \to \ell$, toute suite extraite tend vers ℓ.
Si deux suites extraites ont des limites différentes, (u_n) diverge.
Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.

9. Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.
Ne pas confondre : cela ne prouve pas la convergence de toute la suite.

10. Suites complexes

Si $z_n = a_n + ib_n$ et $z = a + ib$, alors

$$z_n \to z \iff a_n \to a \text{ et } b_n \to b.$$

Pas de monotonie ni d'encadrement dans $\mathbb{C}$.

Prouver une convergence

Priorité : formule explicite, opérations, encadrement, limite monotone, suites adjacentes. Pour une récurrence, prouver d'abord la convergence puis utiliser $\ell = f(\ell)$ si f est continue.

11. Suites usuelles

Arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Géométrique : $u_{n+1} = qu_n$,

$$u_n = u_0 q^n, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ (q \neq 1).$$

$q^n \to 0$ si $|q| < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$.

12. Arithmético-géométrique

Pour $u_{n+1} = au_n + b$, $a \neq 1$:

$$\alpha = \frac{b}{1 - a}, \quad v_n = u_n - \alpha.$$

Alors $v_{n+1} = av_n$ et

$$u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n.$$

13. Récurrence linéaire d'ordre 2

Si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, équation caractéristique :

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Racines réelles distinctes r_1, r_2 :

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Racine double r :

$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

14. Récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode :

1. trouver un intervalle stable J ;
2. prouver $u_n \in J$ par récurrence ;
3. étudier $f(x) - x$ ou f croissante ;
4. conclure par monotonie + borne ;
5. si $u_n \to \ell$, alors $\ell = f(\ell)$ si f continue.

Pièges

— Point fixe $\ell = f(\ell)$ sans convergence prouvée.
— Passage à la limite dans une inégalité stricte : on obtient seulement une inégalité large.
— Utiliser une opération de limites avec une limite inexistante.
— Oublier que l'ordre n'existe pas dans $\mathbb{C}$.

15. Croissances comparées

Pour $a > 0$, $q > 1$, $b > 0$:

$$(\ln n)^b \ll n^a \ll q^n \ll n!.$$

Donc

$$\frac{(\ln n)^b}{n^a} \to 0, \quad \frac{n^a}{q^n} \to 0, \quad \frac{q^n}{n!} \to 0.$$

Divergence

Montrer $u_n \to \pm\infty$, ou trouver deux suites extraites de limites différentes, ou montrer que la suite n'est pas bornée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Primitives et intégrales

Primitives, intégrale d'une fonction continue, IPP, changement de variable

1. Primitives

F est une primitive de f sur un intervalle I si $F' = f$. Si F est une primitive, toutes les primitives sont $F + C$, $C \in \mathbb{K}$.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Pour f continue :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

2. Primitives usuelles

$f(x)$	primitive
x^α, $\alpha \neq -1$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathrm{e}^{\lambda x}$	$\mathrm{e}^{\lambda x}/\lambda$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Formules valables sur un intervalle adapté. Ne pas oublier $+C$ pour les primitives.

3. Reconnaissance

Schémas essentiels :

$$\int u'u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert + C, \qquad \int u'\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u + C.$$

Toujours vérifier en dérivant le résultat.

4. Intégrale sur un segment

Pour f continue sur $[a,b]$:

$$\int_b^a f = -\int_a^b f, \qquad \int_a^a f = 0.$$

Si $F' = f$ sur un intervalle contenant a, b :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

5. Propriétés

Linéarité :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Chasles :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Positivité/croissance : si $0 \le f \le g$, alors

$$0 \le \int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Si $|f| \le M$, alors $\left|\int_a^b f\right| \le M(b-a)$.

6. Moyenne, parité, périodicité

Valeur moyenne :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est impaire sur $[-a,a]$: $\int_{-a}^a f = 0$.
Si f est paire : $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
Si f est T-périodique : $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

7. Intégration par parties

Pour $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b])$:

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

À utiliser si un facteur se simplifie en dérivant : polynôme, ln, arctan ; l'autre doit se primitiver facilement.
Exemple :

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = [t\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1.$$

8. Changement de variable

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta])$ et f continue :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Étapes : poser $t = \varphi(s)$, remplacer $\mathrm{d}t$, changer les bornes, tout réécrire avec s.
Exemple : avec $u = 1 + t^2$,

$$\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln 2.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Sommes de Riemann

Pour f continue sur $[a,b]$:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \to \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas classique :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10. Erreurs classiques

- Oublier $+C$ pour une primitive.
- Oublier $[uv]_a^b$ dans une IPP.
- Ne pas changer les bornes après une substitution.
- Utiliser une primitive hors de son intervalle de validité.
- Confondre variable muette et variable externe : écrire $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pas $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Oublier le signe : $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Équations différentielles simples

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Vocabulaire

Une solution sur I est une fonction assez dérivable vérifiant l'équation pour tout $x \in I$.

Formes du chapitre

$$y' + ay = f(x), \qquad a \in \mathbb{K}$$
$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad a \neq 0$$

Second membre nul : équation homogène associée.

Structure linéaire

Si y_p est une solution particulière et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions homogènes :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_h.$$

Premier ordre : une constante. Second ordre : deux constantes.

2. Premier ordre

Théorème – $y' + ay = 0$

$$\boxed{y(x) = Ce^{-ax}.}$$

Théorème – $y' + ay = f(x)$

Avec $y(x_0) = y_0$:

$$\boxed{y(x) = e^{-a(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)} f(t)\,dt.}$$

Méthode – Variation de la constante

Pour $y' + ay = f$:

$$y_h = Ce^{-ax}, \quad y_p = C(x)e^{-ax}$$
$$C'(x)e^{-ax} = f(x), \quad C'(x) = f(x)e^{ax}.$$

Cas constant

Si $a \neq 0$:

$$y' + ay = b \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a} + Ce^{-ax}.$$

Équilibre : b/a.

3. Second ordre homogène

Pour $ay'' + by' + cy = 0$, poser

$$P(r) = ar^2 + br + c, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème – Trois cas réels

— $\Delta > 0$, racines r_1, r_2 :

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$

— $\Delta = 0$, racine r :

$$y = (A + Bx)e^{rx}.$$

— $\Delta < 0$, racines $\alpha \pm i\omega$:

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x).$$

4. Avec second membre

Méthode – Méthode générale

1. Résoudre l'homogène.
2. Trouver une solution particulière y_p.
3. Écrire $y = y_h + y_p$.
4. Appliquer les conditions initiales.
5. Vérifier par substitution.

Formes à essayer

Constante	constante
Polynôme	polynôme même degré
$e^{\lambda x}$	$Ke^{\lambda x}$
$\cos\omega x, \sin\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$

Si la forme est solution homogène : multiplier par x autant que nécessaire.

Exponentielle

Pour $L(y) = e^{\lambda x}$ et $P(\lambda) \neq 0$:

$$y_p = \frac{1}{P(\lambda)}e^{\lambda x}.$$

Si $P(\lambda) = 0$, il y a résonance : multiplier par x.

Méthode – Conditions initiales

Premier ordre : utiliser $y(x_0) = y_0$.
Second ordre : calculer y' puis utiliser

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1.$$

On obtient un système en A, B.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Exemples flash

Exemple – $y' + 2y = 6$

$$y = 3 + C\mathrm{e}^{-2x}.$$

Exemple – $y'' - 3y' + 2y = 0$

$P(r) = (r-1)(r-2)$, donc

$$y = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}.$$

Exemple – $y'' + 4y = 0$

$P(r) = r^2 + 4$, racines $\pm 2i$:

$$y = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

6. Erreurs à éviter

Attention – Checklist

- oublier $+y_h$ après y_p ;
- erreur de signe dans e^{-ax} ;
- oublier $x\mathrm{e}^{rx}$ en racine double ;
- oublier $\mathrm{e}^{\alpha x}$ quand $\Delta < 0$;
- ne pas transformer une résonance ;
- appliquer $y'(x_0)$ sans dériver toute la solution.

7. Contrôle final

À faire systématiquement

Substituer la solution dans l'équation, vérifier les conditions initiales, compter les constantes et préciser l'intervalle de résolution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Analyse asymptotique

MPSI / MP2I – Relations de comparaison et développements limités

1. Notations O, o, $\sim$

Au voisinage de a ou lorsque $n \to +\infty$:

$$f = O(g) \iff f = gu,\ u \text{ bornée.}$$

Si g ne s'annule pas localement :

$$f = o(g) \iff \frac{f}{g} \to 0, \qquad f \sim g \iff \frac{f}{g} \to 1.$$

Forme très utile :

$$f \sim g \iff f = g + o(g).$$

Relations : $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$; $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ et $g \sim f$.

2. Règles de calcul

- $o(g) + o(g) = o(g)$; $O(g) + O(g) = O(g)$.
- $o(g)O(h) = o(gh)$; $O(g)O(h) = O(gh)$.
- Si $f \sim g$ et $u \sim v$, alors $fu \sim gv$.
- Si les dénominateurs ne s'annulent pas : $\dfrac{f}{u} \sim \dfrac{g}{v}$.
- Si $f = o(g)$, alors $g + f \sim g$.

Équivalence conserve le signe local et la limite finie ou infinie.

Pièges fréquents

- Ne pas additionner des équivalents sans contrôler les compensations.
- Ne pas écrire $f \sim 0$: écrire $f = o(1)$ ou $f \to 0$.
- Toujours préciser le voisinage : $x \to 0$, $x \to +\infty$, $n \to +\infty$.
- $O(g)$ signifie quotient borné ; $o(g)$ signifie quotient de limite 0.

3. Croissances comparées

Pour $\alpha, \beta, \gamma > 0$:

$$(\ln x)^\beta = o(x^\alpha), \qquad x^\alpha = o(\mathrm{e}^{\gamma x}) \quad (x \to +\infty).$$

Donc : logarithmes $\ll$ puissances $\ll$ exponentielles.

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \to 0 \quad (x \to 0^+).$$

Trouver un équivalent

1. Par quotient : montrer $f/g \to 1$.
2. Par terme dominant : factoriser le plus grand ordre.
3. Par encadrement : $f \le g \le h$ et $f \sim h$.
4. Par DL : garder le premier terme non nul.

4. Développement limité

f admet un DL d'ordre n en a si

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n).$$

Les coefficients sont uniques ; on peut tronquer à un ordre plus petit.
Dérivabilité :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

Taylor-Young : si $f \in \mathcal{C}^n$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

5. DL usuels en 0

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2),$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Calculer un DL

1. Fixer le point et l'ordre.
2. Poser $h = x - a$ si besoin.
3. Utiliser les DL usuels.
4. Somme/produit : calculer puis tronquer.
5. Quotient : inverser avec $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots$.
6. Composition simple : remplacer la variable, puis tronquer.

6. Applications locales

Premier terme non nul : si

$$f(a+h) = c_p h^p + o(h^p), \quad c_p \neq 0,$$

alors le signe local est celui de $c_p h^p$.
Tangente : si

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + c_p h^p + o(h^p),\ p \ge 2,$$

alors la tangente est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ et la position relative dépend de $c_p h^p$.
Extremum : si $f(a+h) = f(a) + ch^2 + o(h^2)$, alors minimum strict si $c > 0$, maximum strict si $c < 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Suites

Pour $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang :

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow (u_n/v_n) \text{ bornée},$$

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n/v_n \to 0, \qquad u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n/v_n \to 1.$$

Exemples :

$$\ln n = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(q^n)\ (q > 1), \quad (n+1)^p \sim n^p.$$

Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exemples rapides

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} \to \frac{1}{2} \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

$$\ln(1+x) - \sin x \sim -\frac{x^2}{2}.$$

$$\sqrt{x^2+x} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \sim \frac{1}{2}.$$

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Fonctions de deux variables

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Cadre

Une fonction de deux variables est une application

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Son graphe est la surface $z = f(x, y)$. Une ligne de niveau c est

$$\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = c\}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, la distance euclidienne est

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Une boule ouverte : $B(M_0, r) = \{M \mid d(M, M_0) < r\}$.

2. Continuité

f est continue en (x_0, y_0) si

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad f(x, y) \to f(x_0, y_0).$$

Formellement : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$d((x, y), (x_0, y_0)) < r \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Continuité usuelle

Coordonnées, polynômes, sommes, produits, quotients sans annulation du dénominateur, composées continues : continus sur leur domaine.

3. Dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

En pratique :

— pour f_x, y est constant ;

— pour f_y, x est constant.

Exemple : si $f(x, y) = x^2 y + \mathrm{e}^{xy}$,

$$f_x = 2xy + y\mathrm{e}^{xy}, \qquad f_y = x^2 + x\mathrm{e}^{xy}.$$

4. Classe $\mathcal{C}^1$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U si f_x et f_y existent sur U et sont continues sur U.

Attention – Piège

L'existence de f_x et f_y en un point n'implique pas forcément la continuité en ce point. En revanche, $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ continue.

5. Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Interprétation : direction de plus forte croissance. Si $\nabla f \neq 0$, il est orthogonal aux lignes de niveau.

Dérivée selon $u = (a, b)$:

$$D_u f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle.$$

6. DL d'ordre 1

Si f est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0), alors

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

Forme gradient :

$$f(M_0 + H) = f(M_0) + \langle \nabla f(M_0), H \rangle + o(\|H\|).$$

7. Plan tangent

À la surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

8. Règle de la chaîne

Si $x(t), y(t)$ et f sont $\mathcal{C}^1$:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Changement de variables $g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$:

$$g_u = f_x(\varphi, \psi)\varphi_u + f_y(\varphi, \psi)\psi_u,$$

$$g_v = f_x(\varphi, \psi)\varphi_v + f_y(\varphi, \psi)\psi_v.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Lignes de niveau

Si γ paramètre une ligne de niveau de f, alors $f(\gamma(t)) = c$, donc

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Le gradient est donc normal à la ligne de niveau.
Exemple : pour $f(x,y) = x^2 + y^2$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix},$$

vecteur radial, orthogonal aux cercles $x^2 + y^2 = c$.

10. Extrema

Point critique :

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Théorème – Condition nécessaire

Si f est $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert et admet un extremum local en un point intérieur, alors ce point est critique.

Attention – Attention

Point critique $\not\Rightarrow$ extremum. Exemple : $f(x,y) = x^2 - y^2$ a un point critique en $(0,0)$, mais pas d'extremum.

11. Méthodes rapides

Méthode – Calculer un plan tangent

1. Calculer $f(x_0, y_0)$.
2. Calculer f_x et f_y.
3. Évaluer en (x_0, y_0).
4. Remplacer dans la formule du plan tangent.

Méthode – Chercher des extrema

1. Calculer f_x et f_y.
2. Résoudre $f_x = f_y = 0$.
3. Étudier directement $f(x,y) - f(x_0, y_0)$.
4. Sur un domaine non ouvert, étudier aussi les bords.

12. Erreurs classiques

— Dériver y comme une fonction de x dans f_x.

— Oublier que la condition $\nabla f = 0$ ne vaut que pour un extremum intérieur.

— Confondre plan tangent et surface.

— Oublier la composition dans la règle de la chaîne : f_x et f_y sont évaluées en $(x(t), y(t))$ ou (φ, ψ).

— Affirmer qu'un point critique est automatiquement un minimum ou maximum.

13. Mini-exemples

Pour $f(x,y) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + 3$:

$$f_x = 2(x-1), \quad f_y = 2(y+2).$$

Point critique : $(1, -2)$, minimum global car somme de carrés.
Pour $f(x,y) = xy$:

$$f_x = y, \quad f_y = x.$$

Point critique : $(0,0)$, pas d'extremum car $f(t,t) > 0$ et $f(t,-t) < 0$.

14. Hors programme à ne pas mélanger

La différentiabilité générale, les théorèmes topologiques avancés, la classification générale par Hessienne et les extrema liés détaillés ne sont pas des objectifs du chapitre MPSI/MP2I.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Nombres complexes

Forme algébrique, exponentielle, racines n-ièmes, géométrie – MPSI / MP2I

1. Forme algébrique

Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique

$$z = a + \mathrm{i}b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b, \qquad \mathrm{i}^2 = -1.$$

Conjugué :

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Propriétés :

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}.$$

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$

Inverse :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0).$$

2. Module

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$

$$|zw| = |z|\,|w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0).$$

Inégalités :

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \qquad \big||z| - |w|\big| \leq |z-w|.$$

Distance : si $A(a)$ et $B(b)$,

$$AB = |b - a|.$$

Cercle de centre ω et rayon R :

$$|z - \omega| = R.$$

3. Forme trigonométrique et exponentielle

Pour $z \neq 0$:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r = |z| > 0.$$

θ est défini modulo 2π.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Produit et quotient :

$$(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}) = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}.$$

Puissance :

$$(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

4. Euler et Moivre

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Moivre :

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

Exponentielle complexe : si $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}.$$

Méthode : choisir la forme

- Sommes, parties réelle/imaginaire : forme $a + \mathrm{i}b$.
- Produits, quotients, puissances : forme $re^{\mathrm{i}\theta}$.
- Racines n-ièmes : forme exponentielle.
- Géométrie : affixes, modules, arguments de quotients.

5. Équations du second degré

Pour $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\delta^2 = \Delta$, alors

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Racine carrée de $A + \mathrm{i}B$: poser $w = x + \mathrm{i}y$ et utiliser

$$x^2 - y^2 = A, \quad 2xy = B, \quad x^2 + y^2 = |A + \mathrm{i}B|.$$

6. Racines n-ièmes

Racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \mid k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Elles forment un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.
Si $a = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 0$, alors les solutions de $z^n = a$ sont

$$z_k = R^{1/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Méthode : résoudre $z^n = a$

1. Écrire $a = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
2. Poser $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
3. Comparer : $\rho^n = R$ et $n\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.
4. Donner n solutions distinctes.

7. Géométrie complexe

Affixe de $\overrightarrow{AB}$:

$$z_B - z_A.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Angle orienté :

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \quad [2\pi].$$

Critères :

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}.$$

$$(CA) \perp (CB) \iff \frac{b-c}{a-c} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

8. Transformations

Application $f(z) = az + b$.

- $a = 1$: translation d'affixe b.
- $a = \lambda > 0$, $b = 0$: homothétie de centre 0.
- $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = 0$: rotation de centre 0, angle θ.
- $a \neq 0$: similitude directe, rapport $|a|$, angle $\arg(a)$.

Si $a \neq 1$, point fixe :

$$\omega = \frac{b}{1-a}, \quad f(z) - \omega = a(z - \omega).$$

Conjugaison : $z \mapsto \overline{z}$ = symétrie par rapport à l'axe réel.

Erreurs classiques

- Donner un seul argument au lieu d'une classe modulo 2π.
- Écrire $0 = re^{\mathrm{i}\theta}$: impossible avec $r > 0$.
- Oublier des solutions dans $z^n = a$.
- Confondre $|z + w|$ et $|z| + |w|$.
- Tester l'alignement avec un quotient dont le dénominateur est nul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité, PGCD, Bézout, Gauss, congruences, nombres premiers – MPSI / MP2I

1. Divisibilité

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \mid b \iff \exists q \in \mathbb{Z},\ b = aq.$$

Règles :

$$a \mid b,\ b \mid c \Rightarrow a \mid c.$$

Si $a \mid b$ et $a \mid c$:

$$a \mid ub + vc \quad (u, v \in \mathbb{Z}).$$

Associés :

$$a \mid b \text{ et } b \mid a \iff a = \pm b.$$

Division euclidienne par $b \in \mathbb{N}^*$:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

$b \mid a$ iff le reste est 0.

2. PGCD

Pour a, b non tous deux nuls :

$$a \wedge b = \operatorname{pgcd}(a, b) > 0.$$

$$a \wedge b = |a| \wedge |b|, \quad a \wedge 0 = |a|.$$

Tout diviseur commun à a, b divise $a \wedge b$.
Euclide : si $a = bq + r$, alors

$$a \wedge b = b \wedge r.$$

Le dernier reste non nul est le PGCD.

Euclide étendu

Pour trouver u, v tels que

$$au + bv = a \wedge b,$$

on effectue Euclide puis on remonte les égalités.
Exemple :

$$252 = 198 + 54, \quad 198 = 3 \cdot 54 + 36,$$

$$54 = 36 + 18, \quad 36 = 2 \cdot 18.$$

Donc $252 \wedge 198 = 18$ et

$$18 = 4 \cdot 252 - 5 \cdot 198.$$

3. Bézout et premiers entre eux

Relation de Bézout :

$$\exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = a \wedge b.$$

Théorème de Bézout :

$$a \wedge b = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1.$$

a et b sont premiers entre eux iff $a \wedge b = 1$.

Forme irréductible :

$$\frac{a}{b}, \quad b > 0, \quad a \wedge b = 1.$$

4. Gauss

Lemme de Gauss :

$$a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1 \Longrightarrow a \mid c.$$

Corollaire :

$$a \mid c, \quad b \mid c, \quad a \wedge b = 1 \Longrightarrow ab \mid c.$$

Méthode : dès qu'une divisibilité contient un produit, chercher un facteur premier avec le diviseur.

5. PPCM

$$a \vee b = \operatorname{ppcm}(a, b) \geq 0.$$

Si $a, b \neq 0$:

$$(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|.$$

Avec $252 \wedge 198 = 18$:

$$252 \vee 198 = \frac{252 \cdot 198}{18} = 2772.$$

6. Plusieurs entiers

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = (((a_1 \wedge a_2) \wedge a_3) \cdots) \wedge a_n.$$

Premiers entre eux dans leur ensemble :

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1.$$

Premiers deux à deux :

$$\forall i \neq j,\ a_i \wedge a_j = 1.$$

Deux à deux $\Rightarrow$ dans leur ensemble, mais pas l'inverse : $6, 10, 15$.

7. Nombres premiers

p premier : $p \geq 2$ et seuls diviseurs positifs $1, p$.
Si p premier :

$$p \mid ab \Longrightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b.$$

Il existe une infinité de nombres premiers.
Décomposition unique :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \quad (n \geq 1).$$

Pour tester n premier, il suffit de tester les premiers $p \leq \sqrt{n}$.

8. Valuations p-adiques

Si p est premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

n.

$$v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n).$$

$$m \mid n \iff \forall p,\ v_p(m) \leq v_p(n).$$

$$v_p(m \wedge n) = \min(v_p(m), v_p(n)),$$

$$v_p(m \vee n) = \max(v_p(m), v_p(n)).$$

9. Congruences

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a \equiv b\ [n] \iff n \mid a - b.$$

Même reste modulo n.
Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$:

$$a + c \equiv b + d\ [n], \quad ac \equiv bd\ [n].$$

Donc :

$$a^k \equiv b^k\ [n] \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Cancellation :

$$ac \equiv bc\ [n],\ c \wedge n = 1 \Rightarrow a \equiv b\ [n].$$

Résoudre $ax \equiv b\ [n]$

Poser $d = a \wedge n$.
— Si $d \nmid b$: aucune solution.
— Si $d \mid b$: diviser par d :

$$a'x \equiv b'\ [n'], \quad a' \wedge n' = 1.$$

Puis multiplier par un inverse de a' modulo n'.
Inverse modulo n :

$$au \equiv 1\ [n] \iff a \wedge n = 1.$$

Une relation $au + nv = 1$ donne l'inverse u.

10. Petit théorème de Fermat

Si p est premier et $p \nmid a$:

$$a^{p-1} \equiv 1\ [p].$$

Forme équivalente :

$$a^p \equiv a\ [p] \quad (a \in \mathbb{Z}).$$

Exemple :

$$2^{10} \equiv 1\ [11]$$

car 11 est premier et $11 \nmid 2$.

Erreurs classiques

— Confondre $a \mid b$ et $b \mid a$.
— Donner un PGCD négatif.
— Oublier que le reste euclidien est positif.
— Simplifier une congruence sans condition de primalité avec le module.
— Appliquer Fermat avec un module non premier.
— Confondre premiers dans leur ensemble et deux à deux.

11. Réflexes de méthode

— Divisibilité : factoriser ou passer modulo le diviseur.
— PGCD : Euclide d'abord, factorisation si elle est simple.
— Premiers entre eux : chercher une combinaison égale à 1.
— Produit divisé : penser à Gauss.
— Puissances modulo un premier : penser à Fermat.

12. Mini-exemples à connaître

$$n \wedge (n+1) = 1$$

car tout diviseur commun divise $(n+1) - n = 1$.

$$3 \mid n^3 - n$$

car $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. Si $a \equiv b\ [n]$, alors tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ vérifie

$$P(a) \equiv P(b)\ [n].$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Structures algébriques

Lois internes, groupes, sous-groupes, morphismes, anneaux, corps – MPSI / MP2I

1. Loi interne

Une loi de composition interne sur E est une application

$$\star : E \times E \to E, \qquad (x, y) \mapsto x \star y.$$

Propriétés :
— associative : $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$;
— commutative : $x \star y = y \star x$;
— neutre e : $e \star x = x \star e = x$;
— symétrique de x : $xy = e$ et $yx = e$.
Si le neutre existe, il est unique. Si la loi est associative, le symétrique est unique.

2. Groupe

$(G, \star)$ est un groupe si :
1. $\star$ est interne ;
2. $\star$ est associative ;
3. il existe un neutre e ;
4. tout $x \in G$ possède un inverse x^{-1}.

Groupe abélien : la loi est commutative.
Exemples :

$$(\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{C}^*, \times),\ (\mathrm{Bij}(E), \circ),\ \mathrm{GL}_n(K).$$

3. Règles de calcul dans un groupe

Simplification :

$$ax = ay \Rightarrow x = y, \qquad xa = ya \Rightarrow x = y.$$

Inverse d'un produit :

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Puissances :

$$x^{m+n} = x^m x^n, \qquad (x^m)^n = x^{mn}.$$

Si $xy = yx$, alors

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

Sans commutation, cette dernière formule est fausse en général.

4. Sous-groupe

Soit $H \subset G$. Pour prouver que H est un sous-groupe :

$$H \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \forall x, y \in H,\ xy^{-1} \in H.$$

En notation additive :

$$H \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \forall x, y \in H,\ x - y \in H.$$

Exemples : $a\mathbb{Z}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

5. Morphisme de groupes

$f : G \to G'$ est un morphisme si

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Alors :

$$f(e_G) = e_{G'}, \qquad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Image et noyau :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in G\},$$
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G : f(x) = e_{G'}\}.$$

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de G' et $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G.
Critère :

$$f \text{ injectif} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}.$$

6. Anneau

Un anneau unitaire $(A, +, \times)$ vérifie :
— $(A, +)$ groupe abélien de neutre 0 ;
— $\times$ associative avec neutre 1 ;
— distributivité :

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Anneau commutatif : $ab = ba$.
Exemples : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, K[X], \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$; $\mathcal{M}_n(K)$ est non commutatif si $n \geq 2$.

7. Calculs dans un anneau

Pour tous a, b :

$$0a = a0 = 0, \qquad (-a)b = a(-b) = -(ab),$$

$$(-a)(-b) = ab.$$

Si l'anneau est commutatif :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Dans un anneau non commutatif :

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2.$$

8. Inversibles

Dans un anneau unitaire, a est inversible s'il existe b tel que

$$ab = ba = 1.$$

On note $b = a^{-1}$. L'ensemble $A^\times$ des inversibles est un groupe pour $\times$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exemples :

$$\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\},$$
$$K^\times = K \setminus \{0\},$$
$$\mathcal{M}_n(K)^\times = \mathrm{GL}_n(K).$$

9. Corps

Un corps est un anneau commutatif K tel que $0 \neq 1$ et tout élément non nul est inversible.
Équivalent :

$$(K, +) \text{ groupe abélien}, \qquad (K^*, \times) \text{ groupe abélien}.$$

Exemples :

$$\mathbb{Q}, \qquad \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}.$$

$\mathbb{Z}$ n'est pas un corps : 2 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$.

10. Sous-corps

Pour montrer que $L \subset K$ est un sous-corps :
— $0, 1 \in L$;
— $x, y \in L \Rightarrow x - y \in L$;
— $x, y \in L \Rightarrow xy \in L$;
— $x \in L \setminus \{0\} \Rightarrow x^{-1} \in L$.
Exemple :

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

est un sous-corps de $\mathbb{R}$ car

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

11. Erreurs classiques

— Ne pas préciser la loi : $\mathbb{R}$ seul n'est pas une structure.
— Oublier l'interne : une opération peut sortir de l'ensemble.
— Confondre 0 et 1.
— Diviser sans vérifier que l'élément est non nul/inversible.
— Utiliser $ab = ba$ dans un anneau non commutatif.
— Oublier $f(1) = 1$ pour un morphisme d'anneaux unitaires.

12. Hiérarchie

$$\text{corps} \Rightarrow \text{anneau commutatif} \Rightarrow \text{anneau}.$$

Tout anneau contient un groupe additif $(A, +)$. Les inversibles d'un anneau forment un groupe multiplicatif $A^\times$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Polynômes

Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$, racines, dérivation, factorisation – MPSI / MP2I

1. Polynômes et degré

On travaille en général avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X].$$

Deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux.
Si $P \neq 0$, $\deg P$ est le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$. Le coefficient associé est le coefficient dominant. P est unitaire s'il vaut 1.
Règles :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q),$$

$$P, Q \neq 0 \Rightarrow \deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

Si $\deg P \neq \deg Q$, alors

$$\deg(P+Q) = \max(\deg P, \deg Q).$$

2. Évaluation et racines

Pour $a \in \mathbb{K}$,

$$P(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k.$$

a est racine de P ssi $P(a) = 0$.
Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines distinctes.
Conséquence : si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ coïncident en $n+1$ points distincts, alors $P = Q$.

3. Division euclidienne

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) tel que

$$A = BQ + R, \qquad \deg R < \deg B.$$

Q est le quotient, R le reste.
Cas fondamental : le reste de la division de P par $X - a$ est $P(a)$. Donc

$$a \text{ racine de } P \iff (X-a) \mid P.$$

4. Trouver un reste

Pour le reste de P modulo B :

1. écrire R avec $\deg R < \deg B$;
2. utiliser les racines de B ;
3. si une racine est multiple, dériver aussi.

Exemple : si $B = (X-a)^2$, alors $R = uX + v$ et

$$R(a) = P(a), \qquad R'(a) = P'(a).$$

5. Divisibilité et PGCD

$B \mid A$ signifie : $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $A = BQ$.
Deux polynômes associés diffèrent d'un facteur constant non nul :

$$Q = \lambda P, \qquad \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Les unités de $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes non nulles.
Le PGCD de A, B est choisi unitaire. Il se calcule par l'algorithme d'Euclide :

$$A = BQ + R \Rightarrow \operatorname{pgcd}(A, B) = \operatorname{pgcd}(B, R).$$

6. Bézout et Gauss

Bézout : si $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$, alors

$$\exists U, V \in \mathbb{K}[X], \quad AU + BV = D.$$

En particulier,

$$A \wedge B = 1 \iff \exists U, V, AU + BV = 1.$$

Gauss :

$$A \mid BC \quad \text{et} \quad A \wedge B = 1 \Rightarrow A \mid C.$$

Si $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$, alors $AB \mid C$.

7. Dérivation

Si

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

alors

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

Règles :

$$(P+Q)' = P' + Q', \qquad (PQ)' = P'Q + PQ'.$$

Taylor polynomiale :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

C'est une égalité exacte.

8. Multiplicité

a est racine de multiplicité $m \geq 1$ de $P \neq 0$ si

$$(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P.$$

Critère par dérivées :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Si a_i sont des racines distinctes de multiplicités m_i, alors

$$\prod_i (X-a_i)^{m_i} \mid P, \qquad \sum_i m_i \leq \deg P.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

9. Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède une racine complexe.
Donc tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq 0$, s'écrit

$$P = a \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha_j)^{m_j},$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, les α_j sont deux à deux distincts et

$$\sum_j m_j = \deg P.$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, les irréductibles sont les polynômes de degré 1.

10. Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et z est racine, alors $\overline{z}$ est racine avec la même multiplicité.
Dans $\mathbb{R}[X]$, les irréductibles sont :

— les facteurs linéaires $X - a$;

— les quadratiques de discriminant < 0.

Une factorisation réelle regroupe les racines complexes conjuguées :

$$(X - (\alpha + i\beta))(X - (\alpha - i\beta))$$
$$= X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 + \beta^2.$$

11. Coefficients-racines

Si

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

est scindé avec racines $r_1, \ldots, r_n$ comptées avec multiplicité, alors

$$P = a_n \prod_{j=1}^{n} (X - r_j).$$

Formules à connaître :

$$r_1 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$r_1 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Cas degré 2 : pour $aX^2 + bX + c$,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \qquad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

12. Réflexes d'exercice

— Divisibilité par $X - a$: tester $P(a)$.

— Racine double : tester $P(a)$ et $P'(a)$.

— Reste modulo un polynôme : écrire un reste de degré plus petit.

— PGCD : utiliser Euclide, puis rendre unitaire.

— Factorisation réelle : racines réelles puis quadratiques irréductibles.

— Factorisation complexe : tous les facteurs sont linéaires.

— Identité polynomiale : comparer les coefficients ou utiliser assez de racines.

Erreurs fréquentes

— Confondre polynôme et fonction polynomiale.

— Oublier que le PGCD est choisi unitaire.

— Dire qu'un polynôme réel se scinde toujours sur $\mathbb{R}$: faux.

— Utiliser $\deg(P + Q) = \max$ sans vérifier l'annulation des termes dominants.

— Oublier les multiplicités dans les relations coefficients-racines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Fractions rationnelles

Partie entière, pôles, décomposition en éléments simples – MPSI / MP2I

1. Définition

On travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une fraction rationnelle est un quotient

$$F = \frac{P}{Q}, \qquad P \in \mathbb{K}[X],\ Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}.$$

Égalité :

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \iff PB = AQ.$$

On note l'ensemble $\mathbb{K}(X)$. Les polynômes sont les fractions $P/1$.

2. Forme irréductible

Une écriture P/Q est irréductible si

$$P \wedge Q = 1.$$

En choisissant Q unitaire, elle est unique.
Zéros : racines de P. Pôles : racines de Q. Toujours lire zéros et pôles après simplification.
Degré : si $F \neq 0$,

$$\deg F = \deg P - \deg Q.$$

F est propre si $\deg F < 0$.

3. Partie entière

Division euclidienne :

$$P = QE + R, \qquad \deg R < \deg Q.$$

Alors

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}.$$

E est la partie entière. Elle est nulle ssi $\deg P < \deg Q$.
Une DES commence toujours par : réduire, puis extraire la partie entière.

4. Pôles et multiplicité

Si $F = P/Q$ irréductible et

$$Q = (X-a)^m S, \qquad S(a) \neq 0,$$

alors a est un pôle d'ordre m.
Partie polaire associée :

$$\frac{c_m}{(X-a)^m} + \cdots + \frac{c_1}{X-a}.$$

Le nombre de termes est égal à la multiplicité.

5. DES dans $\mathbb{C}(X)$

Si

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-a_i)^{m_i},$$

alors

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{c_{i,k}}{(X-a_i)^k}.$$

Sur $\mathbb{C}$, tous les facteurs irréductibles sont linéaires.

6. DES dans $\mathbb{R}(X)$

Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \prod_i (X-a_i)^{m_i} \prod_j Q_j^{n_j},$$

où les Q_j sont irréductibles de degré 2.
Forme réelle :

$$E + \sum_i \sum_k \frac{\alpha_{i,k}}{(X-a_i)^k} + \sum_j \sum_k \frac{\beta_{j,k}X + \gamma_{j,k}}{Q_j(X)^k}.$$

Sur un facteur quadratique, le numérateur est affine.

7. Pôle simple

Si a est un pôle simple de $F = P/Q$:

$$c = \lim_{X \to a} (X-a)F(X).$$

Si $Q(a) = 0$ et $Q'(a) \neq 0$:

$$c = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Méthode : multiplier par $X-a$, simplifier, évaluer en a.

8. Pôle multiple

Si a est un pôle d'ordre m, poser

$$G(X) = (X-a)^m F(X).$$

Alors, pour la partie polaire

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{(X-a)^j},$$

on a

$$c_j = \frac{G^{(m-j)}(a)}{(m-j)!} \quad (1 \leq j \leq m).$$

En pratique : trouver d'abord le coefficient de plus haute puissance, puis compléter par identification.

9. Méthode globale

1. Réduire P/Q.
2. Calculer la partie entière.
3. Factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
4. Écrire la forme attendue.
5. Calculer les coefficients : pôles simples, pôles multiples, identification.
6. Vérifier en multipliant par le dénominateur commun.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Exemple simple

$$\frac{2X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2}.$$

En $X=1$: $5 = 3A$, donc $A = 5/3$.
En $X=-2$: $-1 = -3B$, donc $B = 1/3$.

$$\frac{2X+3}{(X-1)(X+2)} = \frac{5}{3(X-1)} + \frac{1}{3(X+2)}.$$

11. Exemple réel

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{A}{X-1} + \frac{BX+C}{X^2+1}.$$

Identification :

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)}.$$

12. Dérivée logarithmique

Si

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-a_i)^{m_i},$$

alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-a_i}.$$

Très utile quand le numérateur est la dérivée du dénominateur, ou proche.

13. Applications

Primitives :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C.$$

Dérivées :

$$\left(\frac{1}{(X-a)^j}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(j+n-1)!}{(j-1)!} \frac{1}{(X-a)^{j+n}}.$$

Sommes : décomposer en termes qui se télescopent, par exemple

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

14. Erreurs fréquentes

- Lire les pôles avant simplification.
- Oublier la partie entière.
- Utiliser une DES complexe alors qu'on demande une DES réelle.
- Mettre une constante au numérateur d'un facteur quadratique réel.
- Oublier des termes pour un pôle multiple.
- Ne pas vérifier l'identité finale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Matrices

MPSI / MP2I – calcul matriciel, inverse, puissances

1. Vocabulaire

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: matrices à n lignes et p colonnes.
$A = (a_{i,j})$: i = ligne, j = colonne.
Cas particuliers :

- ligne : $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$; colonne : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- carrée : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$;
- nulle : $0_{n,p}$; identité : $I_n = (\delta_{i,j})$.

2. Opérations

Somme et combinaison linéaire : seulement pour matrices de même taille.

$$(A+B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \qquad (\lambda A)_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

Transposée : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et

$$(A^{\mathsf{T}})_{i,j} = a_{j,i}.$$

$$(A+B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}, \quad (AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}.$$

3. Produit matriciel

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Règles :

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

Identité : $I_n A = A$, $A I_p = A$.

Attention

En général :

$$AB \neq BA, \qquad AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

On ne simplifie pas $AB = AC$ par A sans savoir que A est inversible.

4. Matrices carrées utiles

- Diagonale : $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
- Triangulaire supérieure : $a_{i,j} = 0$ si $i > j$.
- Triangulaire inférieure : $a_{i,j} = 0$ si $i < j$.
- Scalaire : $A = \lambda I_n$.
- Symétrique : $A^{\mathsf{T}} = A$.
- Antisymétrique : $A^{\mathsf{T}} = -A$.

Trace :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}, \qquad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

5. Puissances

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A^0 = I_n, quad A^{m+1} = A^m A.$$

$$A^p A^q = A^{p+q}, \qquad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Si $AB = BA$, alors

$$(AB)^m = A^m B^m,$$

et

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k.$$

Calculer A^m

Chercher dans cet ordre :

1. A diagonale : puissances coefficient par coefficient ;
2. A triangulaire : diagonale facile, reste par calcul ;
3. $A = \lambda I + N$ avec $N^r = 0$;
4. relation $A^2 = \alpha A + \beta I$;
5. formule conjecturée puis récurrence.

Si $N^r = 0$:

$$(\lambda I + N)^m = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} N^k.$$

6. Inversibilité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe B tel que

$$AB = BA = I_n.$$

Alors B est unique et $B = A^{-1}$. Ensemble : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$

$$(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}, \quad (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m.$$

7. Inverses classiques

Diagonale :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

si tous les $\lambda_i \neq 0$.
Triangulaire : inversible ssi tous les coefficients diagonaux sont non nuls ; l'inverse est triangulaire du même type.
Taille 2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

si $ad - bc \neq 0$.

Calculer A^{-1}

Méthode de Gauss-Jordan :

$$(A \mid I_n) \longrightarrow (I_n \mid A^{-1}).$$

Opérations autorisées sur les lignes :

- échange de deux lignes ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;
- ajout à une ligne d'un multiple d'une autre.

Si le bloc gauche ne peut pas devenir I_n, A n'est pas inversible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Systèmes linéaires

Un système s'écrit

$$AX = B.$$

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors il admet une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$

Les colonnes de A^{-1} sont les solutions des systèmes

$$AX = e_1, \quad \ldots, \quad AX = e_n.$$

9. Polynômes de matrices

Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

Si $A^2 - 3A + 2I = 0$, alors $A^2 = 3A - 2I$ et les puissances se réduisent à une combinaison de A et I.

Erreurs fréquentes

- oublier les tailles ;
- utiliser $AB = BA$ sans preuve ;
- inverser un produit dans le mauvais ordre ;
- appliquer le binôme sans commutation ;
- confondre matrice non nulle et matrice inversible ;
- croire que $AB = 0$ force un facteur nul.

Checklist exercice

1. Les tailles rendent-elles l'expression définie ?
2. La matrice est-elle carrée ?
3. Y a-t-il une structure spéciale : diagonale, triangulaire, nilpotente ?
4. Les facteurs commutent-ils ?
5. Faut-il calculer l'inverse ou seulement résoudre un système ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Systèmes linéaires

Prépa MPSI / MP2I – résolution par pivot de Gauss

1. Définitions

Un système linéaire à n équations et p inconnues est de la forme

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j = b_i \quad (1 \le i \le n).$$

Avec $A = (a_{i,j})$, $X = (x_j)$, $B = (b_i)$, il s'écrit

$$AX = B.$$

La matrice augmentée est $(A \mid B)$.

2. Opérations élémentaires

Opérations qui conservent l'ensemble des solutions :

- $L_i \leftrightarrow L_j$;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$;
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $i \neq j$.

Ne jamais multiplier une ligne par 0. Ne pas faire d'opérations sur colonnes pour résoudre un système.

3. Pivot de Gauss

1. Écrire la matrice augmentée.
2. Choisir un pivot non nul.
3. Annuler les coefficients sous le pivot.
4. Recommencer en dessous et à droite.
5. Lire le système échelonné.
6. Résoudre par remontée ou paramétrer.

But : obtenir une matrice échelonnée.

4. Forme échelonnée

Dans une matrice échelonnée :

- les lignes nulles sont en bas ;
- chaque pivot est plus à droite que le précédent ;
- colonnes avec pivot : inconnues principales ;
- colonnes sans pivot : inconnues libres.

5. Lecture des solutions

Après pivot :

- ligne $0 = \beta$ avec $\beta \neq 0$: aucune solution ;
- un pivot par inconnue : solution unique ;
- pas de contradiction et inconnues libres : infinité de solutions.

6. Remontée

Exemple :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ y + 3z = 5, \\ 2z = 4. \end{cases}$$

On obtient $z = 2$, puis $y = -1$, puis $x = 5$.

7. Systèmes homogènes

Un système homogène s'écrit $AX = 0$.

- Il admet toujours la solution nulle.
- L'ensemble des solutions est stable par combinaison linéaire.
- S'il y a des inconnues libres, on exprime les solutions avec des paramètres.

8. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$, deux équations linéaires représentent deux droites :

- sécantes : une solution ;
- parallèles distinctes : aucune solution ;
- confondues : infinité de solutions.

Dans $\mathbb{R}^3$, les équations représentent des plans.

9. Système avec paramètre

Si un pivot dépend d'un paramètre m :

1. ne pas diviser immédiatement ;
2. traiter le cas pivot non nul ;
3. traiter séparément le cas pivot nul ;
4. conclure selon m.

10. Matrices inversibles

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$AX = B \text{ a une unique solution pour tout } B$$

si et seulement si A est inversible. Équivalemment, le pivot appliqué à A donne n pivots. Pour calculer A^{-1}, réduire $(A \mid I_n)$ en $(I_n \mid A^{-1})$.

11. Exemple type

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Échanger L_2, L_3, puis $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$$

Donc $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$.

12. Erreurs classiques

- Oublier de modifier le second membre.
- Diviser par un pivot potentiellement nul.
- Confondre $0 = 0$ et $0 = 1$.
- Déclarer une infinité de solutions avant d'avoir vérifié la compatibilité.
- Perdre une inconnue libre dans le paramétrage.

13. Rédaction attendue

Une solution propre contient :

- la matrice augmentée ;
- les opérations de lignes indiquées ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— la forme échelonnée ;
— la conclusion : ensemble des solutions.

14. À retenir

Le pivot de Gauss transforme un système en système équivalent échelonné. Les pivots déterminent les inconnues principales ; les colonnes sans pivot fournissent les paramètres ; une ligne impossible donne l'incompatibilité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Espaces vectoriels

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Espace vectoriel

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E dans lequel on peut additionner deux vecteurs et multiplier un vecteur par un scalaire de $\mathbb{K}$, avec les règles usuelles.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
Toujours préciser le corps : $\mathbb{C}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, mais de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

2. Sous-espace vectoriel

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si

$$F \neq \varnothing \quad \text{et} \quad \forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F.$$

Méthode : vérifier $0_E \in F$, puis la stabilité par combinaison linéaire.

Piège

Une droite ou un plan affine ne passant pas par l'origine n'est pas un sous-espace vectoriel. Une union de deux sous-espaces n'est pas forcément un sous-espace.

3. Combinaisons linéaires

Une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$ est un vecteur

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p.$$

Le sous-espace engendré par la famille est

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est le plus petit sous-espace contenant tous les x_i.

4. Somme et somme directe

Pour deux sous-espaces F, G de E :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}.$$

La somme est directe si l'écriture $z = x + y$ est unique.
Pour deux sous-espaces :

$$F + G \text{ directe} \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

Si $E = F \oplus G$, alors F et G sont supplémentaires dans E.

5. Famille libre / liée

$(x_1, \dots, x_p)$ est libre si

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Elle est liée si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
Critères rapides :

- présence de $0_E \Rightarrow$ liée ;
- deux vecteurs proportionnels $\Rightarrow$ liée ;
- un seul vecteur non nul $\Rightarrow$ famille libre.

6. Famille génératrice et base

Une famille est génératrice de E si

$$E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p).$$

Une base est une famille libre et génératrice.
Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique :

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Les λ_i sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

7. Dimension finie

E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Toutes les bases ont alors le même nombre de vecteurs : c'est $\dim E$.

$$\dim \mathbb{K}^n = n, \qquad \dim \mathbb{K}_n[X] = n+1, \qquad \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np.$$

$\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

8. Théorèmes essentiels

Dans un espace E de dimension n :

- toute famille libre a au plus n vecteurs ;
- toute famille génératrice a au moins n vecteurs ;
- une famille libre de n vecteurs est une base ;
- une famille génératrice de n vecteurs est une base ;
- toute famille libre peut être complétée en une base ;
- de toute famille génératrice, on peut extraire une base.

9. Sous-espaces en dimension finie

Si F est un sous-espace de E et $\dim E < +\infty$, alors

$$\dim F \leq \dim E.$$

Si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.
Méthode pour prouver $F = G$: montrer $F \subset G$ puis $\dim F = \dim G$.

10. Formule de Grassmann

Pour deux sous-espaces F, G de dimension finie :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Si $F + G$ est directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

11. Rang d'une famille

$$\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p).$$

Interprétations :

— rang = nombre maximal de vecteurs indépendants extraits ;

— libre $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg} = p$;

— génératrice de $E \Leftrightarrow \mathrm{rg} = \dim E$.

Calcul pratique dans $\mathbb{K}^n$: placer les vecteurs en colonnes et utiliser le pivot de Gauss.

Méthodes à maîtriser

— Sous-espace défini par équations : résoudre le système homogène et paramétrer.

— Base d'un sous-espace : écrire le vecteur général comme combinaison linéaire de vecteurs libres.

— Base de E avec n vecteurs : prouver seulement libre ou seulement génératrice.

— Somme directe : tester $F \cap G = \{0\}$ ou l'unicité de la décomposition.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Applications linéaires

MPSI / MP2I – noyau, image, rang, matrice représentative

Définition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est linéaire si

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

Conséquences : $u(0) = 0$, $u(-x) = -u(x)$,

$$u\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i u(x_i).$$

Vocabulaire

- Endomorphisme : $u : E \to E$.
- Isomorphisme : linéaire bijective.
- Automorphisme : isomorphisme de E dans E.
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Noyau et image

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\} \subset E.$$
$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\} \subset F.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels. Critères :

$$u \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(u) = \{0\},$$

$$u \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(u) = F.$$

Rang

$$\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}(u).$$

Si E est de dimension finie :

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}(u).}$$

Si $\dim E = \dim F$, alors pour $u : E \to F$:

$$\text{injective} \iff \text{surjective} \iff \text{bijective}.$$

Calculer $\mathrm{Ker}(u)$

1. Écrire un vecteur général $x \in E$.
2. Résoudre $u(x) = 0$.
3. Paramétrer les solutions.
4. Donner une base du noyau.

Calculer $\mathrm{Im}(u)$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Réduire cette famille donne une base de l'image et le rang.

Détermination par une base

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, une application linéaire $u : E \to F$ est entièrement déterminée par les $u(e_i)$. Si $x = \sum_i x_i e_i$, alors

$$u(x) = \sum_i x_i u(e_i).$$

Matrice d'une application

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F.

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u).$$

La colonne j de A est le vecteur des coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$. Formule clé :

$$\boxed{[u(x)]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}.}$$

Composition, inverse

Si les bases sont compatibles :

$$\mathrm{Mat}(v \circ u) = \mathrm{Mat}(v)\,\mathrm{Mat}(u).$$

Si u est un isomorphisme :

$$\mathrm{Mat}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}(u)^{-1}.$$

Un endomorphisme en dimension finie est bijectif si et seulement si sa matrice est inversible.

Matrice et sous-espaces

Pour $u : X \mapsto AX$ avec $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:

- $\mathrm{Ker}(u)$: solutions de $AX = 0$;
- $\mathrm{Im}(u)$: espace engendré par les colonnes de A ;
- $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A)$: nombre de pivots après Gauss.

Changement de base

Si P contient en colonnes les coordonnées de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne $\mathcal{B}$, alors

$$[x]_{\mathcal{B}} = P[x]_{\mathcal{B}'}.$$

Pour un endomorphisme :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Toujours vérifier la convention utilisée.

Questions types

- **Montrer linéaire :** tester une combinaison $\alpha x + \beta y$.
- **Injectivité :** calculer le noyau.
- **Surjectivité :** calculer l'image ou le rang.
- **Bijectivité :** en mêmes dimensions, une seule des deux suffit.
- **Matrice :** images des vecteurs de base en colonnes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Projecteur et symétrie

Projecteur : $p^2 = p$, et

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$

Symétrie : $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Si p est un projecteur, alors

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E$$

est une symétrie.

Erreurs à éviter

- Mettre les images des vecteurs de base en lignes au lieu des colonnes.
- Confondre $\mathrm{Ker}(u) \subset E$ et $\mathrm{Im}(u) \subset F$.
- Dire qu'une image de famille libre est libre : faux si u n'est pas injective.
- Utiliser $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}(u)$ si E n'est pas de dimension finie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Déterminants

MPSI / MP2I – 1re année

Idée générale

Dans un espace E de dimension n, le déterminant de n vecteurs mesure un volume orienté. Il est nul exactement quand les vecteurs sont liés.

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ base} \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Forme n-linéaire alternée

Une forme $f : E^n \to \mathbb{K}$ est :
— n-linéaire : linéaire en chaque variable ;
— alternée : deux variables égales $\Rightarrow f = 0$.
Conséquences :

$$f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$$

et toute famille liée donne un déterminant nul.

Matrices : définitions

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

À connaître surtout :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Si A est triangulaire :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propriétés fondamentales

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
— $\det(I_n) = 1$;
— $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
— $\det(A^T) = \det(A)$;
— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
— $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$;
— $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ si A est inversible.

Opérations élémentaires

Sur lignes ou colonnes :

Opération	Effet
Échanger deux lignes	change le signe
Multiplier une ligne par λ	multiplie par λ
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	ne change rien
Deux lignes proportionnelles	déterminant nul

Même règles pour les colonnes.

Méthode de calcul

1. Chercher une ligne/colonne avec des zéros.
2. Créer des zéros par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
3. Trianguliariser si possible.
4. Noter chaque échange et chaque facteur sorti.
5. Développer par cofacteurs si c'est court.

Cofacteurs et développement

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A_{ij} est obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Développement selon la ligne i :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

Développement selon la colonne j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

Comatrice

$$\mathrm{Com}(A) = (C_{ij}).$$

Relation fondamentale :

$$A \,\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Si A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T.$$

Cas 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Endomorphismes

Pour $u \in \mathrm{End}(E)$:

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)),$$

indépendamment de la base $\mathcal{B}$.

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v),$$
$$u \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(u) \neq 0.$$

Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Elle est inversible ssi les a_i sont deux à deux distincts.

Applications

- Tester une base : former la matrice des coordonnées et calculer le déterminant.
- Tester l'inversibilité : $\det(A) \neq 0$.
- Avec un paramètre : résoudre $\det(A_m) = 0$.
- Rang : le rang est le plus grand ordre d'un déterminant extrait non nul.

Pièges fréquents

- $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ en général.
- Sarrus seulement en taille 3.
- Un échange change le signe.
- Multiplier une ligne multiplie le déterminant.
- Dans l'inverse : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{Com}(A)^T$.
- Diagonale non nulle $\not\Rightarrow$ inversible, sauf cas triangulaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Espaces préhilbertiens

MPSI / MP2I – 1re année

Produit scalaire réel

Sur un espace vectoriel réel E, un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^2 \to \mathbb{R}$:

— bilinéaire ;
— symétrique : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
— positive : $\langle x, x \rangle \geq 0$;
— définie : $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Exemples :

$$\mathbb{R}^n : \ \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i, \qquad \mathcal{C}([a,b]) : \ \langle f, g \rangle = \int_a^b fg.$$

Norme associée

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Propriétés :

— $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
— $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
— $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Identités :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Cauchy-Schwarz

Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Égalité $\iff$ (x, y) est liée. Formes usuelles :

$$\left|\sum a_k b_k\right| \leq \left(\sum a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum b_k^2\right)^{1/2},$$

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

Orthogonalité

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

Orthogonal d'une partie A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \ \langle x, a \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel. Pythagore : si $x \perp y$,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Si (x_i) est orthogonale :

$$\left\|\sum x_i\right\|^2 = \sum \|x_i\|^2.$$

Familles orthogonales

Une famille (e_i) est orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. Elle est orthonormale si en plus $\|e_i\| = 1$.

— Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
— Toute famille orthonormale est libre.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i,$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

Gram-Schmidt

À partir d'une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Pour $k \geq 2$:

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle \, e_i, \qquad e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}.$$

Alors $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale et

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

Projection orthogonale

Si F est de dimension finie :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Pour $x \in E$, la projection $p = \mathrm{proj}_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$x - p \in F^\perp.$$

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F :

$$\mathrm{proj}_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

Projection sur $\mathrm{Vect}(a)$, $a \neq 0$:

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Vect}(a)}(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Distance à un sous-espace

Pour F de dimension finie :

$$\operatorname{dist}(x, F) = \|x - \operatorname{proj}_F(x)\|.$$

Caractérisation :

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\| \geq \|x - \operatorname{proj}_F(x)\|.$$

La projection est donc la meilleure approximation de x par un vecteur de F.

Base non orthonormale

Si $F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et

$$p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i,$$

on impose $x - p \in F^\perp$:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle \quad (1 \leq j \leq p).$$

C'est le système normal de projection. La matrice

$$G = (\langle u_i, u_j \rangle)$$

est la matrice de Gram.

Pièges classiques

- La formule $\operatorname{proj}_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$ exige une base orthonormale.
- Orthogonale $\neq$ orthonormale : vérifier les normes.
- Dans une base quelconque, $\langle x, y \rangle$ ne vaut pas forcément $X^T Y$.
- Pour prouver un produit scalaire, ne pas oublier $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $F \perp G$ ne suffit pas à prouver $E = F \oplus G$.

Méthodes express

1. Produit scalaire : bilinéaire, symétrique, positif, défini.
2. Projection : chercher $p \in F$ tel que $x - p \perp F$.
3. Distance : calculer $\|x - p\|$.
4. Cauchy-Schwarz : écrire la quantité comme un produit scalaire.
5. Gram-Schmidt : retirer les composantes déjà construites puis normaliser.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Dénombrement

MPSI / MP2I – 1re année

Cardinaux

Pour un ensemble fini E, $\mathrm{Card}(E)$ est son nombre d'éléments.

$$A \subset E \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E).$$

Si A, B sont disjoints :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

En général :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Si $A \subset E$:

$$\mathrm{Card}(E \setminus A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Produit cartésien

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F).$$

Plus généralement :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(E_i).$$

Principe multiplicatif : si un objet se construit en étapes avec $n_1, \ldots, n_p$ choix, le total vaut $n_1 \cdots n_p$.

Applications

Si $\mathrm{Card}(E) = p$ et $\mathrm{Card}(F) = n$:

$$\#\{f : E \to F\} = n^p.$$

Si $p \leq n$, nombre d'injections $E \to F$:

$$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$:

$$\#\{\text{bijections } E \to F\} = n!.$$

Même cardinal fini : injection $\Leftrightarrow$ surjection $\Leftrightarrow$ bijection.

Parties

Pour $\mathrm{Card}(E) = n$:

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Une partie correspond au choix « pris / non pris » pour chaque élément.

$$\#\{A \subset E \mid \mathrm{Card}(A) = p\} = \binom{n}{p}.$$

Pour $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Formules à connaître

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Relation de Pascal :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Somme d'une ligne :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

Liste, arrangement, combinaison

Soit E de cardinal n.

Objet	Situation	Nombre
p-**liste**	ordre, répétition	n^p
Arrangement	ordre, sans répétition	$\frac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison	pas d'ordre, sans répétition	$\binom{n}{p}$
Permutation	ordre de tous les éléments	$n!$

Méthode générale

Avant la formule, poser les questions :

1. L'ordre compte-t-il ?
2. Les répétitions sont-elles autorisées ?
3. La taille est-elle fixée ?
4. Les cas sont-ils disjoints ?
5. Le complémentaire est-il plus simple ?

Puis écrire l'ensemble compté et justifier le modèle choisi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Complémentaire

Pour compter « au moins un », compter souvent le contraire :

$$\#(\text{au moins un}) = \#(\text{total}) - \#(\text{aucun}).$$

Exemple : mots de longueur 4 sur $\{a, b, c\}$ contenant au moins un a :

$$3^4 - 2^4.$$

Partition

Si $E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_r$:

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card}(E_i).$$

Exemple : choisir une main de 5 cartes contenant exactement deux rois dans un jeu de 32 cartes :

$$\binom{4}{2}\binom{28}{3}.$$

Double comptage

Compter le même ensemble de deux façons donne des identités. Exemple : choisir r éléments dans une réunion disjointe $E \sqcup F$ avec $\mathrm{Card}(E) = m$, $\mathrm{Card}(F) = n$:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}.$$

Erreurs classiques

- Utiliser $\binom{n}{p}$ alors que l'ordre compte.
- Utiliser n^p alors que les répétitions sont interdites.
- Additionner des cas qui se recouvrent.
- Oublier de vérifier que le résultat est entier et inférieur au total possible.

Exemples rapides

- Codes de 5 chiffres, répétition autorisée : 10^5.
- Codes de 5 chiffres, premier non nul : 9×10^4.
- Podiums parmi 12 coureurs : $12 \times 11 \times 10$.
- Comités de 4 parmi 30 : $\binom{30}{4}$.
- Parties contenant un sous-ensemble fixé A de cardinal a dans E de cardinal n : 2^{n-a}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Probabilités finies

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Univers et événements

Vocabulaire

On travaille sur un univers fini non vide Ω.

- Une issue est un élément $\omega \in \Omega$.
- Un événement est une partie $A \subset \Omega$.
- $\varnothing$: impossible ; Ω : certain.
- $\overline{A} = \Omega \setminus A$: contraire.
- $A \cap B$: « A et B » ; $A \cup B$: « A ou B ».
- A et B incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Probabilité

Une probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et additive sur les événements incompatibles. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors une loi est donnée par

$$p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Pour tout $A \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i.$$

Équiprobabilité

Si toutes les issues ont même probabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}.$$

Méthode : choisir Ω, vérifier l'équiprobabilité, compter les issues favorables.

2. Formules de base

Calculs essentiels

Pour tous événements A, B :

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(\varnothing) = 0, \qquad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \\ A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B), \\ \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B), \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{gathered}$$

Si $A \cap B = \varnothing$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Pour trois événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) =& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

3. Conditionnement

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Probabilité conditionnelle

Si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)}.$$

Pour une intersection successive :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Probabilités totales

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)}.$$

Si $\mathbb{P}(A_i) > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}.$$

Cas fréquent :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \mid \overline{A}).$$

Bayes

Avec les mêmes hypothèses et $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)}}.$$

À utiliser pour remonter d'un effet observé B vers une cause possible A_k.

4. Indépendance

Deux événements

A et B sont indépendants si

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}.$$

Si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$A, B \text{ indépendants} \iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

Pièges

— Incompatibles $\neq$ indépendants.
— $\mathbb{P}(A \mid B) \neq \mathbb{P}(B \mid A)$ en général.

— Ne jamais supposer l'équiprobabilité sans justification.
— Dans un tirage sans remise, les probabilités changent après chaque tirage.

Famille indépendante

$A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si, pour toute partie non vide $I \subset \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

L'indépendance deux à deux ne suffit pas pour l'indépendance mutuelle.

5. Méthodes rapides

Choisir la bonne méthode

1. Décrire l'univers et l'événement.
2. Tester l'équiprobabilité.
3. Utiliser le complémentaire pour « au moins un », « aucun », « pas tous ».
4. Utiliser une partition quand plusieurs cas exclusifs expliquent l'événement.
5. Utiliser un arbre pour une expérience en étapes.
6. Multiplier sur un chemin, additionner les chemins favorables.

Tirages classiques

Avec r rouges et b bleues, tirage simultané de k boules :

$$\mathbb{P}(\text{exactement } j \text{ rouges}) = \frac{\binom{r}{j}\binom{b}{k-j}}{\binom{r+b}{k}}.$$

Répétition indépendante avec succès de probabilité p :

$$\mathbb{P}(\text{exactement } k \text{ succès en } n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Variables aléatoires finies

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Définitions

Variable aléatoire

Sur un univers fini $(\Omega, \mathbb{P})$, une variable aléatoire est une application

$$X : \Omega \to E.$$

Ensemble des valeurs : $X(\Omega)$.

$$\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}, \quad \{X \in A\} = \{\omega \mid X(\omega) \in$$

Loi de X

La loi est donnée par les nombres

$$\mathbb{P}(X = x), \quad x \in X(\Omega),$$

avec

$$\mathbb{P}(X = x) \geq 0, \qquad \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Pour $A \subset X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Trouver une loi

1. Lister les valeurs possibles de X.
2. Décrire $\{X = x\}$ pour chaque valeur.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = x)$.
4. Vérifier que la somme vaut 1.

2. Lois usuelles

Uniforme

$X \sim \mathcal{U}(E)$ si E est fini non vide et

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(E)} \quad (x \in E).$$

Donc, pour $A \subset E$:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)}.$$

Bernoulli

$X \sim \mathcal{B}(p)$ si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

À retenir :

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Pour un événement A, $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$ et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Binomiale

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si X compte les succès dans n épreuves indépendantes de même probabilité p.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1 - p).$$

3. Couples et indépendance

Loi conjointe et marges

Pour deux variables X, Y :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

Marges :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y} \mathbb{P}(X = x, Y = y),$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Indépendance

X et Y sont indépendantes si, pour tous x, y :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).}$$

Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Si X, Y indépendantes :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \qquad \mathrm{Cov}(X, Y) = 0.$$

4. Espérance

Définition

Pour X réelle ou complexe :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Linéarité :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

La linéarité ne demande pas l'indépendance.

Transfert

Si f est définie sur $X(\Omega)$:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Pour un couple :

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x} \sum_{y} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Espérance par indicatrices

Si X compte des objets :

$$X = \mathbf{1}_{A_1} + \cdots + \mathbf{1}_{A_n}.$$

Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Très utile même sans indépendance.

5. Variance et covariance

Variance

Pour X réelle :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

et

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.}$$

Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Covariance

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Formule pratique :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).}$$

Variance d'une somme :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Si X, Y indépendantes, $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

6. Inégalités

Markov

Si $X \geq 0$ et $a > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.}$$

Bienaymé-Tchebychev

Si X est réelle et $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.}$$

Erreurs classiques

- Confondre variable aléatoire et loi.
- Utiliser une binomiale sans indépendance.
- Croire que $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$.
- Croire que covariance nulle implique indépendance.
- Oublier que l'espérance est linéaire sans hypothèse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision – Espérance et variance

Prépa MPSI / MP2I – 1re année

1. Cadre fini

Variable et loi

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, avec Ω fini.

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}, \quad p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

La loi est donnée par les p_i :

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1.$$

Indicateur

Pour un événement A :

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{sur } A, \\ 0 & \text{hors de } A. \end{cases}$$

À retenir :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A), \qquad \mathbb{V}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)).$$

2. Espérance

Définition

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)}$$

C'est une moyenne pondérée : elle n'est pas forcément une valeur prise par X.

Formule de transfert

Pour toute fonction g définie sur $X(\Omega)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)}$$

Cas utile :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x} x^2\mathbb{P}(X = x).$$

Linéarité

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)}$$

Aucune indépendance n'est nécessaire. En particulier :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Comptage par indicatrices

Si N compte les événements $A_1, \dots, A_n$ réalisés :

$$N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Pas besoin d'indépendance.

3. Variance

Définition

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

Écart-type :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$$

Interprétation : dispersion autour de l'espérance.

Koenig-Huygens

Formule à utiliser en calcul :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

Donc : calculer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$.

Transformation affine

$$\boxed{\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)}$$

$$\boxed{\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)}$$

Ajouter une constante ne change pas la variance.

Variable centrée réduite

Si $\mathbb{V}(X) > 0$:

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Alors

$$\mathbb{E}(X^*) = 0, \qquad \mathbb{V}(X^*) = 1.$$

4. Lois usuelles

Formules à connaître

Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
$X = a$ p.s.	a	0
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$\mathcal{B}(n, p)$	np	$np(1-p)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Covariance

Définition

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))).$$

Formule pratique :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

Et

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X).$$

Variance d'une somme

$$\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)}$$

Plus généralement :

$$\mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

6. Indépendance

Conséquences

Si X et Y sont indépendantes :

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0, \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Pour $X_1, \dots, X_n$ indépendantes deux à deux :

$$\mathbb{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{V}(X_i).$$

Attention

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X, Y \text{ indépendantes.}$$

La réciproque est fausse. Pour prouver l'indépendance, vérifier la loi conjointe :

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y).$$

7. Inégalités

Markov

Si $X \geq 0$ et $a > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Bienaymé-Tchebychev

Pour $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$$

C'est l'outil standard pour contrôler l'écart à la moyenne.

8. Méthodes rapides

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$

1. Écrire la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X) = \sum x p_x$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X^2) = \sum x^2 p_x$.
4. Conclure : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Pour une somme

— Espérance : toujours linéaire.

$$\mathbb{E}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathbb{E}(X_i)$$

— Variance : ajouter les covariances.

— Si indépendance deux à deux : les variances s'additionnent.

Erreurs classiques

— $\mathbb{E}(X^2) \neq \mathbb{E}(X)^2$ en général.
— La variance n'est pas linéaire.
— Une espérance n'est pas forcément une valeur possible.
— Ne pas supposer l'équiprobabilité sans justification.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).