MathLvl

Fiches de révision de maths

Terminale maths expertes

10 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Nombres complexes (forme algébrique) p. 2
2. Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) p. 4
3. Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$ p. 6
4. Géométrie des nombres complexes p. 8
5. Divisibilité et congruences p. 10
6. PGCD, Bézout et Gauss p. 12
7. Nombres premiers p. 15
8. Matrices : opérations et inverse p. 18
9. Matrices : applications p. 21
10. Graphes et marches aléatoires p. 23

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Chapitre 1 - Nombres complexes : forme algébrique

Fiche de révision - Terminale maths expertes

1. Forme algébrique

$$z = a + \mathrm{i}b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b.$$

$$a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d \iff a = c \text{ et } b = d.$$

Cas particuliers :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0, \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0.$$

2. Opérations

Pour $z = a + \mathrm{i}b$ et $w = c + \mathrm{i}d$:

$$z + w = (a + c) + \mathrm{i}(b + d),$$

$$z - w = (a - c) + \mathrm{i}(b - d),$$

$$zw = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc).$$

$$\mathrm{i}^{4k} = 1, \quad \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4k+2} = -1, \quad \mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}.$$

Exemples flash

$$(3 - 2\mathrm{i})(4 + \mathrm{i}) = 14 - 5\mathrm{i}.$$

$$(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^{2026} = -1.$$

$$(2 - \mathrm{i})^2 = 3 - 4\mathrm{i}.$$

3. Conjugué

Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors

$$\bar{z} = a - \mathrm{i}b.$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, \qquad z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z.$$

4. Conjugué et calculs

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \quad (z \neq 0).$$

Conséquence utile :

$$\overline{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\bar{z}.$$

À ne pas confondre

$\mathrm{Im}(a + \mathrm{i}b) = b$ et non $\mathrm{i}b$.
La forme algébrique attendue est toujours $A + \mathrm{i}B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

5. Module

Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Identité fondamentale :

$$z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0, \quad |\bar{z}| = |z|.$$

$$|zw| = |z||w|, \qquad |z^n| = |z|^n, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \ (z \neq 0).$$

6. Inverse et quotient

Si $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}.$$

Pour $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Méthode : multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

$$\frac{3 + 2\mathrm{i}}{1 - 4\mathrm{i}} = \frac{(3 + 2\mathrm{i})(1 + 4\mathrm{i})}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}\mathrm{i}.$$

7. Résoudre $az = b$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

- Si $a \neq 0$, solution unique : $z = \dfrac{b}{a}$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, tous les complexes sont solutions.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, aucune solution.

Exemple :

$$(2 - \mathrm{i})z = 5 + 3\mathrm{i} \Rightarrow z = \frac{5 + 3\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \frac{7}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

8. Équations avec z et $\bar{z}$

Méthode standard :

1. Poser $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Remplacer $\bar{z}$ par $x - \mathrm{i}y$.
3. Identifier les parties réelle et imaginaire.
4. Résoudre le système obtenu.

Exemple :

$$(1+\mathrm{i})z + 2\bar{z} = 3 - \mathrm{i}$$

conduit à

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - y = -1, \end{cases} \qquad \text{donc } z = 2 + 3\mathrm{i}.$$

Reconnaître réel / imaginaire pur

Montrer que z est réel :

$$\mathrm{Im}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{z} = z.$$

Montrer que z est imaginaire pur :

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{z} = -z.$$

9. Formule du binôme

Pour $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k.$$

À connaître :

$$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}.$$

$$(a+\mathrm{i}b)^3 = a^3 - 3ab^2 + \mathrm{i}(3a^2b - b^3).$$

10. Démonstrations exigibles

Savoir démontrer :

- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ en posant $z = a + \mathrm{i}b$ et $w = c + \mathrm{i}d$;
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ par produit répété ou récurrence ;
- $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$ lorsque $z \neq 0$;
- la formule du binôme par récurrence.

Pièges classiques

- Le module $|z|$ est un réel positif, jamais un complexe.
- Pour un quotient, on conjugue le dénominateur.
- Ne pas diviser par z sans vérifier que $z \neq 0$.
- $z + \bar{z}$ est réel et $z - \bar{z}$ est imaginaire pur.

11. Formules essentielles

$$z = a + \mathrm{i}b, \qquad \bar{z} = a - \mathrm{i}b.$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z\bar{z} = |z|^2.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0).$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \qquad z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z).$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \qquad |zw| = |z||w|.$$

12. Mini-entraînement

1. $\dfrac{2-5\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{17}{10}\mathrm{i}$.

2. Si $z = 1 - 2\mathrm{i}$, alors

$$\bar{z} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad |z| = \sqrt{5}, \quad z\bar{z} = 5.$$

3. $z + \bar{z} = 8 \iff z = 4 + \mathrm{i}y$, $y \in \mathbb{R}$.

4. $z^2 = z \iff z = 0$ ou $z = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche de révision - Terminale maths expertes

Chapitre 2 - Nombres complexes : formes trigonométrique et exponentielle

Objectif : maîtriser argument, forme exponentielle, Moivre et Euler.

1. Module, argument

Pour $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Un argument θ vérifie

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Notation :

$$\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Tous les arguments sont $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Point clé

0 n'a pas d'argument. Pour déterminer θ, il faut utiliser **le cosinus et le sinus** afin de placer le bon quadrant.

2. Formes de z

Si $z \neq 0$, alors

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

où $r = |z| > 0$ et θ est un argument de z.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Cas utiles :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}.$$

Passer de $a + \mathrm{i}b$ à $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

1. Calculer $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Trouver θ avec $\cos\theta = a/r$, $\sin\theta = b/r$.
3. Écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Ex. $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$:

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}.$$

3. Produit, quotient, puissance

Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, alors

$$zw = rs\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}, \qquad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}.$$

Donc

$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}.$$

Forme à choisir

- Somme/différence : forme algébrique.
- Produit/quotient/puissance : forme exponentielle.
- Distance/angle : module et argument.
- Trigonométrie : Euler ou Moivre.

4. Moivre

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Équivalent exponentiel :

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

Usage : calculer des puissances et obtenir des identités trigonométriques.

5. Euler

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Conséquences classiques :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Exemple type : puissance

Calculer $(1 + \mathrm{i})^8$.

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

Donc

$$(1 + \mathrm{i})^8 = (\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 8\pi/4} = 16\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 16.$$

Exemple type : quotient

$$z = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/5}, \qquad w = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/10}.$$

Alors

$$\frac{z}{w} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/5 - 7\pi/10)} = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\frac{3}{2}\mathrm{i}.$$

Erreurs fréquentes

- Oublier le $\pmod{2\pi}$ pour les arguments.
- Confondre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et e^{θ}.
- Choisir un angle avec le bon cosinus mais le mauvais sinus.
- Dans un quotient, additionner les arguments au lieu de les soustraire.
- Oublier de réduire l'angle modulo 2π.

Mini-méthode de rédaction

Pour donner une forme exponentielle :

$$|z| = r, \quad \cos\theta = \frac{\Re(z)}{r}, \quad \sin\theta = \frac{\Im(z)}{r}.$$

Puis :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Toujours indiquer un angle compatible avec les deux égalités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Synthèse rapide et automatismes

À utiliser pour rédiger vite, juste et sans erreur de quadrant.

À connaître par coeur

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0

Adapter les signes selon le quadrant.

Repérer le quadrant

Pour $z = a + \mathrm{i}b$:

a	b	θ
$+$	$+$	$]0, \pi/2[$
$-$	$+$	$]\pi/2, \pi[$
$-$	$-$	$]\pi, 3\pi/2[$
$+$	$-$	$]-\pi/2, 0[$

Le signe de a fixe $\cos\theta$, le signe de b fixe $\sin\theta$.

Conjugué et inverse

Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$, alors

$$\overline{z} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Et

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1, \qquad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

Conversions éclair

$$-3 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \qquad -4\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}.$$

$$-\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\pi/6}.$$

$$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Checklist avant de rendre

- Ai-je exclu $z = 0$ avant de parler d'argument ?
- Ai-je écrit $r > 0$ dans $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$?
- Mon angle est-il compatible avec $\cos\theta$ et $\sin\theta$?
- Ai-je réduit l'angle modulo 2π ?
- La forme finale demandée est-elle algébrique, trigonométrique ou exponentielle ?

Exercice flash corrigé

Simplifier

$$B = \frac{(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1 - \mathrm{i})^2}.$$

On écrit

$$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}.$$

Donc

$$B = \frac{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2} = -4\mathrm{i}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche de révision - Terminale maths expertes

Chapitre 3 - Équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Objectif : résoudre des équations polynomiales par discriminant, racines connues et factorisation.

1. Vocabulaire

Un polynôme est une expression

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Son degré est n. Une racine α vérifie

$$P(\alpha) = 0.$$

Résoudre $P(z) = 0$, c'est trouver toutes les racines complexes.

2. Racine connue

Pour tout polynôme P et tout $a \in \mathbb{C}$:

$$P(a) = 0 \iff \exists Q, \quad P(z) = (z-a)Q(z).$$

Donc si a est racine, alors $z - a$ est un facteur de $P(z)$.

Méthode : factoriser par $z - a$

1. Vérifier $P(a) = 0$.
2. Écrire $P(z) = (z-a)Q(z)$.
3. Trouver Q par identification ou division.
4. Résoudre $Q(z) = 0$.

3. Nombre de racines

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
Si un polynôme de degré n a déjà n racines distinctes, la résolution est terminée.

Polynôme réel

Si P est à coefficients réels et si α est racine, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine.
Exemple : si $2 + 5\mathrm{i}$ est racine, alors $2 - 5\mathrm{i}$ est racine.

4. Factorisation de $z^n - a^n$

Pour $n \geq 1$:

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-1}).$$

Cas utiles :

$$z^2 - a^2 = (z-a)(z+a),$$
$$z^3 - a^3 = (z-a)(z^2 + az + a^2).$$

Exemples rapides

$$z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4).$$
$$z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}).$$

5. Second degré réel dans $\mathbb{C}$

Pour

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

calculer

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta > 0$:
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$:
$$z = -\frac{b}{2a} \quad \text{racine double.}$$
- Si $\Delta < 0$:
$$z = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple type : $\Delta < 0$

$$z^2 + 4z + 13 = 0.$$
$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36.$$

Donc

$$z = \frac{-4 \pm \mathrm{i}\sqrt{36}}{2} = -2 \pm 3\mathrm{i}.$$

Solutions :

$$\{-2 - 3\mathrm{i},\ -2 + 3\mathrm{i}\}.$$

6. Forme factorisée d'un trinôme

Si α et β sont les racines de $az^2 + bz + c$, alors

$$az^2 + bz + c = a(z-\alpha)(z-\beta).$$

Si α est racine double :

$$az^2 + bz + c = a(z-\alpha)^2.$$

7. Relations de Viète

Si α et β sont les racines de $az^2 + bz + c$, alors

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Usage : vérifier une factorisation ou retrouver des coefficients.

Exemple : Viète

Pour $z^2 + 4z + 13$,

$$\alpha = -2 - 3\mathrm{i}, \quad \beta = -2 + 3\mathrm{i}.$$

$$\alpha + \beta = -4, \qquad \alpha\beta = 13.$$

Cela correspond bien à $-b/a = -4$ et $c/a = 13$.

Méthode : équation de degré 3

Quand une racine a est connue :
1. Vérifier $P(a) = 0$.
2. Factoriser $P(z) = (z-a)(Az^2 + Bz + C)$.
3. Résoudre le trinôme $Az^2 + Bz + C = 0$ dans $\mathbb{C}$.
4. Donner toutes les solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Exemple type : degré 3

Résoudre :

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0.$$

On teste 3 :

$$3^3 - 3 \times 3^2 + 4 \times 3 - 12 = 0.$$

Donc

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = (z - 3)(z^2 + 4).$$

Ainsi

$$(z - 3)(z^2 + 4) = 0.$$

Solutions :

$$\{3,\ 2\mathrm{i},\ -2\mathrm{i}\}.$$

Exemple type : $z^3 = 8$

$$z^3 = 8 \iff z^3 - 2^3 = 0.$$

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4).$$

Pour $z^2 + 2z + 4 = 0$:

$$\Delta = 4 - 16 = -12.$$

Donc

$$z = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Solutions :

$$\{2,\ -1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\}.$$

Exemple : racines conjuguées

Un polynôme réel de degré 3 admet $1 + 2\mathrm{i}$ et 5 comme racines. Alors $1 - 2\mathrm{i}$ est aussi racine. Comme il y a déjà trois racines distinctes, l'ensemble des racines est

$$\{5,\ 1 + 2\mathrm{i},\ 1 - 2\mathrm{i}\}.$$

Réflexe de rédaction

Pour une résolution complète, écrire :

1. le calcul qui prouve la racine connue ;
2. la factorisation obtenue ;
3. la résolution du facteur restant ;
4. l'ensemble final des solutions.

Erreurs fréquentes

- Oublier les racines complexes quand $\Delta < 0$.
- Écrire $\sqrt{-36} = 6$ au lieu de $6\mathrm{i}$.
- Factoriser par $z - a$ sans vérifier $P(a) = 0$.
- Oublier la racine conjuguée d'un polynôme réel.
- Confondre $z^3 - a^3$ et $(z - a)^3$.

À retenir

$$P(a) = 0 \iff (z - a) \mid P(z).$$

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + a^{n-1}).$$

$$\Delta < 0 \Longrightarrow z = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche de révision - Terminale maths expertes

Chapitre 4 - Géométrie des nombres complexes

Objectif : traduire une configuration géométrique par modules, arguments et transformations complexes.

1. Affixe d'un point et d'un vecteur

Dans un repère orthonormé direct :

$$M(x;y) \longleftrightarrow z_M = x + \mathrm{i}y.$$

Si $A(a)$, $B(b)$, alors

$$z_{\overrightarrow{AB}} = b - a.$$

Milieu de $[AB]$:

$$z_I = \frac{a+b}{2}.$$

2. Distances et lieux

$$AB = |b-a|, \qquad AB^2 = (b-a)\overline{(b-a)}.$$

Cercle de centre $A(a)$, rayon r :

$$|z-a| = r.$$

Médiatrice de $[AB]$:

$$|z-a| = |z-b|.$$

3. Angles

Pour $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, avec $A \neq B$, $A \neq C$:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}.$$

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB}.$$

4. Alignement et orthogonalité

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

$$(AB) \perp (AC) \iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Le quotient doit être pris avec le même point de départ A.

Méthode : nature d'une figure

1. Calculer les affixes de vecteurs.
2. Comparer les modules pour les longueurs.
3. Utiliser les quotients pour les angles.
4. Conclure avec un vocabulaire précis.

5. Translation

Translation de vecteur d'affixe t :

$$z' = z + t.$$

Elle conserve longueurs et angles.

6. Rotation

Rotation de centre $\Omega(\omega)$, angle θ :

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega),$$

soit

$$z' = \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega).$$

Centre O : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

7. Homothétie

Homothétie de centre $\Omega(\omega)$, rapport $k \in \mathbb{R}^*$:

$$z' - \omega = k(z-\omega),$$

soit

$$z' = \omega + k(z-\omega).$$

Les longueurs sont multipliées par $|k|$.

Cas particuliers

Symétrie centrale de centre $\Omega(\omega)$:

$$z' = 2\omega - z.$$

Symétrie par rapport à l'axe réel :

$$z' = \overline{z}.$$

8. Similitude directe

$$z' = az + b, \quad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$$

Rapport : $|a|$. Angle : $\arg(a)$. Si $a \neq 1$, centre :

$$\omega = \frac{b}{1-a}, \qquad z' - \omega = a(z-\omega).$$

Si $a = 1$, c'est une translation $z' = z + b$.

Reconnaître $z' = az + b$

- $a = 1$: translation.
- $|a| = 1$, $a \neq 1$: rotation.
- $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$: homothétie.
- Cas général : similitude directe.

9. Parallélogramme

Pour $A(a), B(b), C(c), D(d)$:

$$ABCD \text{ parallélogramme} \iff b - a = c - d.$$

Équivalent : les diagonales ont le même milieu :

$$a + c = b + d.$$

10. Triangle équilatéral

Si $A(a)$, $B(b)$, les deux points C possibles vérifient

$$c = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(b-a) \quad \text{ou} \quad c = a + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}(b-a).$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exemple type 1 : triangle

$A(1+\mathrm{i})$, $B(4+\mathrm{i})$, $C(1+4\mathrm{i})$.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3\mathrm{i}}{3} = \mathrm{i}.$$

Donc $(AB) \perp (AC)$. De plus

$$AB = 3, \quad AC = 3.$$

Donc ABC est rectangle isocèle en A.

Exemple type 2 : transformation

Soit

$$f(z) = \mathrm{i}z + 1.$$

Ici $a = \mathrm{i}$, donc $|a| = 1$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$. Comme $a \neq 1$, le centre est

$$\omega = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}.$$

C'est une rotation de centre $\Omega\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Formules de construction

Image de $B(b)$ par la rotation de centre $A(a)$, angle θ :

$$z' = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(b-a).$$

Image de $B(b)$ par l'homothétie de centre $A(a)$, rapport k :

$$z' = a + k(b-a).$$

Rédaction attendue

Pour prouver $(AB) \perp (AC)$, écrire :

$$\frac{c-a}{b-a} = \lambda\mathrm{i}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Donc un argument du quotient est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, donc les droites sont perpendiculaires.

Pièges fréquents

- Ne pas confondre affixe d'un point z_M et affixe d'un vecteur $b-a$.
- Pour l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, garder A comme origine commune.
- Un quotient réel prouve l'alignement ; un quotient imaginaire pur prouve la perpendicularité.
- Pour une transformation, ne pas oublier de calculer le centre si $a \neq 1$.

Checklist rapide

- Longueur ? utiliser un module.
- Angle ? utiliser un argument.
- Droites parallèles ? quotient réel entre vecteurs.
- Droites perpendiculaires ? quotient imaginaire pur.
- Transformation ? comparer à $z' = az + b$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision — Chapitre 5
Divisibilité et congruences — Terminale maths expertes

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ b = ak.$$

À lire : « a divise b ».

Propriétés
- $a \mid b$ et $a \mid c \Rightarrow a \mid (b+c)$ et $a \mid (b-c)$.
- $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
- $a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

2. Division euclidienne
Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

q est le quotient ; r est le reste.
Même si $a < 0$, le reste est positif ou nul :

$$-17 = 5 \times (-4) + 3.$$

3. Congruences modulo m
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b).$$

Équivalent : a et b ont le même reste modulo m.

$$38 \equiv 2 \pmod{6}, \qquad -7 \equiv 5 \pmod{12}.$$

4. Calculs autorisés
Si $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$, alors

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

Attention : on ne divise pas une congruence sans condition.

5. Prouver une divisibilité
Deux réflexes :

$$A = mk,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ou} \qquad A \equiv 0 \pmod{m}.$$

Exemple : si $10 \equiv -1 \pmod{11}$, alors

$$10^{2n} - 1 \equiv (-1)^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Donc $11 \mid 10^{2n} - 1$.

6. Restes des puissances
Pour calculer a^n modulo m :
1. réduire a modulo m ;
2. calculer les puissances successives ;
3. repérer un cycle ;
4. réduire l'exposant.

Exemple modulo 7 :

$$3^1 \equiv 3,\ 3^2 \equiv 2,\ 3^3 \equiv 6,$$

$$3^4 \equiv 4,\ 3^5 \equiv 5,\ 3^6 \equiv 1.$$

Cycle de longueur 6.

7. Restes classiques
Modulo 4, tout carré vaut 0 ou 1 :

$$n^2 \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{ou} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Modulo 3, tout carré vaut 0 ou 1 :

$$n^2 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{ou} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{3}.$$

8. Critères de divisibilité
- par 2 : chiffre des unités pair ;
- par 5 : unité 0 ou 5 ;
- par 10 : unité 0 ;
- par 3 : somme des chiffres divisible par 3 ;
- par 9 : somme des chiffres divisible par 9 ;
- par 11 : différence des sommes alternées divisible par 11.

9. Congruence linéaire simple
Pour résoudre $ax \equiv b \pmod{m}$, tester les restes :

$$x \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Exemple :

$$3x \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Donc $x = 7k + 5$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. Erreurs à éviter
- $a \equiv b \pmod{m}$ ne signifie pas $a = b$.
- Le reste modulo m est dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.
- Une preuve de divisibilité doit produire un multiple entier.
- En fin de calcul, réduire le reste entre 0 et $m-1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Méthodes rapides — Chapitre 5

A. Démontrer $m \mid A$
Méthode 1 : factoriser.

$$A = mk, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Méthode 2 : congruence.

$$A \equiv 0 \pmod{m}.$$

Exemple-type. Montrer que $8 \mid n^2 - 1$ si n est impair.

$$n = 2k + 1, \quad n^2 - 1 = 4k(k + 1).$$

Comme $k(k + 1)$ est pair, $n^2 - 1$ est multiple de 8.

B. Trouver un reste

1. remplacer chaque nombre par son reste ;
2. effectuer les opérations ;
3. réduire entre 0 et $m - 1$.

Exemple :

$$17^4 \equiv 2^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Le reste est 1.

C. Puissances avec cycle

Reste de 2^{100} modulo 7 :

$$2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Cycle de longueur 3 et $100 = 3 \times 33 + 1$. Donc

$$2^{100} \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{7}.$$

D. Tableau de restes

Pour étudier n^2 modulo 5 :

r	0	1	2	3	4
$r^2 \bmod 5$	0	1	4	4	1

Donc un carré modulo 5 vaut seulement 0, 1 ou 4.

E. Vocabulaire essentiel

— $a \mid b$: a divise b.
— $a \equiv b \pmod{m}$: même reste modulo m.
— $a = bq + r$: division euclidienne.
— r : reste, avec $0 \leq r < b$.
— $m \mid A$: A est un multiple de m.

F. Mini-entraînement

1. Reste de 5^{2024} modulo 8.
2. Montrer que $7 \mid 2^{3n} - 1$ pour $n \geq 1$.
3. Résoudre $2x \equiv 4 \pmod{6}$.

Réponses rapides

1. $5^2 \equiv 1 \pmod{8}$, donc reste 1.
2. $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $2^{3n} \equiv 1$.
3. $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$.

Réflexes en contrôle

— Réduire tôt les grands nombres modulo m.
— Justifier les cycles de puissances.
— Toujours conclure : « donc $m \mid A$ ».
— Ne pas confondre égalité et congruence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Chapitre 6 - Fiche de révision

PGCD, Bézout et Gauss

PGCD

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, non tous deux nuls :

$$\text{pgcd}(a,b) = \max\{d \in \mathbb{N}^* \mid d \mid a \text{ et } d \mid b\}.$$

Propriétés :

- $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(|a|,|b|) = \text{pgcd}(b,a)$;
- $\text{pgcd}(a,0) = |a|$ si $a \neq 0$;
- si $b \mid a$, alors $\text{pgcd}(a,b) = |b|$;
- a et b sont premiers entre eux $\iff \text{pgcd}(a,b) = 1$.

Algorithme d'Euclide

Si $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$, alors

$$\boxed{\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,r).}$$

On recommence jusqu'au reste nul. Le dernier reste non nul est le PGCD.

Exemple

$$252 = 198 + 54,$$
$$198 = 54 \times 3 + 36,$$
$$54 = 36 + 18, \qquad 36 = 18 \times 2.$$

Donc $\text{pgcd}(252, 198) = 18$.

Bézout

Si $d = \text{pgcd}(a,b)$, alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\boxed{au + bv = d.}$$

En particulier :

$$\boxed{\text{pgcd}(a,b) = 1 \iff \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1.}$$

Méthode pour trouver u et v

1. Faire l'algorithme d'Euclide.
2. Écrire le dernier reste non nul.
3. Remonter les égalités pour exprimer ce reste avec a et b.

Inverse modulo n

a est inversible modulo n si et seulement si

$$\boxed{\text{pgcd}(a,n) = 1.}$$

Si $au + nv = 1$, alors

$$au \equiv 1 \pmod{n},$$

donc u est un inverse de a modulo n.

Exemple

Trouver un inverse de 7 modulo 26 :

$$1 = 3 \times 26 - 11 \times 7.$$

Donc $-11 \times 7 \equiv 1 \pmod{26}$, et un inverse est

$$\boxed{15 \pmod{26}}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Page 1/3
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Théorème de Gauss

À connaître par coeur

Si

$$a \mid bc \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(a,b) = 1,$$

alors

$$\boxed{a \mid c.}$$

Corollaires

— Si $a \mid c$, $b \mid c$ et $\text{pgcd}(a,b) = 1$, alors $ab \mid c$.

— Si p est premier et $p \mid ab$, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$.

— Si $\text{pgcd}(a,n) = 1$ et $ax \equiv ay \pmod{n}$, alors $x \equiv y \pmod{n}$.

Équations diophantiennes

On cherche $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$ax + by = c.$$

Soit $d = \text{pgcd}(a,b)$.

Condition d'existence

$$\boxed{ax + by = c \text{ admet une solution } \iff d \mid c.}$$

Si $d \mid c$ et si (x_0, y_0) est une solution particulière, alors toutes les solutions sont

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t, \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.}$$

Méthode rapide

1. Calculer $d = \text{pgcd}(a,b)$.
2. Vérifier $d \mid c$.
3. Trouver $au + bv = d$.
4. Multiplier par c/d : solution particulière.
5. Ajouter le paramètre $t \in \mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Page 2/3
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exemple

Résoudre $18x + 30y = 12$.

$$\text{pgcd}(18, 30) = 6, \qquad 6 \mid 12.$$

Une identité :

$$18 \times 2 + 30 \times (-1) = 6.$$

On multiplie par 2 :

$$18 \times 4 + 30 \times (-2) = 12.$$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 + 5t, \\ y = -2 - 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.}$$

Pièges classiques

— Le PGCD est le dernier reste non nul, pas le dernier quotient.

— Bézout donne une existence ; les coefficients ne sont pas uniques.

— Gauss exige $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

— Dans $ax + by = c$, toujours tester $\text{pgcd}(a, b) \mid c$ avant de chercher les solutions.

— Pour la solution générale, retenir : $+\frac{b}{d}t$ pour x et $-\frac{a}{d}t$ pour y.

Mini-checklist

Je sais calculer un PGCD par Euclide.
Je sais remonter Euclide pour obtenir Bézout.
Je sais prouver que deux entiers sont premiers entre eux.
Je sais utiliser Gauss dans une divisibilité.
Je sais résoudre $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

● Programme officiel

Chapitre 7 — Nombres premiers — Fiche de révision

Essentiel du chapitre : définitions, méthodes, formules et automatismes à maîtriser.

1. Définitions essentielles

Nombre premier

p est premier si $p \geq 2$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

1 n'est pas premier ; 2 est le seul premier pair.

Nombres premiers entre eux

a et b sont premiers entre eux lorsque pgcd(a,b)=1.

Ils n'ont aucun facteur premier commun.

$$p \text{ premier} \Leftrightarrow \mathrm{Div}(p) = \{1 ; p\}$$

2. Tester la primalité

Méthode rapide

Pour prouver que n est premier, tester uniquement les diviseurs premiers $p \leq \sqrt{n}$.

Si aucun ne divise n, alors n est premier.

Exemple : pour 101, $\sqrt{101} \approx 10{,}0$. On teste 2, 3, 5, 7. Aucun ne divise 101, donc 101 est premier.

3. Décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Tout entier $n \geq 2$ admet une unique décomposition en facteurs premiers, à l'ordre près.

Utilisation	Règle
Diviseurs de n	$d = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$, avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.
Nombre de diviseurs	$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$.
PGCD	Produit des facteurs communs avec les plus petits exposants.
PPCM	Produit des facteurs avec les plus grands exposants.

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Il possède $(3+1)(2+1)(1+1)=24$ diviseurs positifs.

4. Lemmes à connaître

Lemme d'Euclide

Si p est premier et si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

Lemme de Gauss

Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

$$a \mid bc \text{ et } \mathrm{pgcd}(a,b)=1 \Rightarrow a \mid c$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

● Chapitre 7

Fiche de révision — Nombres premiers

5. Congruences modulo un nombre premier

Si p est premier, tout entier a non divisible par p admet un inverse modulo p.

p premier et p ne divise pas a ⇒ ∃u ∈ ℤ, au ≡ 1 [p]

Résoudre ax ≡ b [p]

1. Vérifier que p ne divise pas a.
2. Trouver l'inverse u de a modulo p.
3. Conclure : x ≡ ub [p].

Exemple : 4x ≡ 3 [11]. L'inverse de 4 modulo 11 est 3 car 4×3 ≡ 1 [11]. Donc x ≡ 3×3 ≡ 9 [11].

6. Petit théorème de Fermat

Si p est premier et p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1$ [p]

Pour tout entier a : $a^{p} \equiv a$ [p]

Méthode pour calculer a^k modulo p premier

1. Vérifier que p est premier et que p ne divise pas a.
2. Utiliser $a^{p-1} \equiv 1$ [p].
3. Écrire k = (p−1)q + r.
4. Remplacer a^k par a^r modulo p.

Exemple : calculer 2^{58} modulo 7. Comme $2^{6} \equiv 1$ [7] et 58 = 6×9 + 4, alors $2^{58} \equiv 2^{4} = 16 \equiv 2$ [7].

7. Inverse modulo p par Fermat

$a^{-1} \equiv a^{p-2}$ [p], si p premier et p ne divise pas a

Cette formule est utile, mais pour de petits nombres il est souvent plus rapide de chercher directement un multiple congru à 1.

8. Erreurs fréquentes

À éviter absolument

Utiliser Fermat alors que le modulo n'est pas premier.
Oublier la condition p ne divise pas a dans la forme $a^{p-1} \equiv 1$ [p].
Affirmer que 1 est premier.
Tester tous les entiers jusqu'à n pour la primalité : il suffit d'aller jusqu'à √n.
Confondre PGCD et PPCM dans les exposants.

9. Mini-algorithmes

Question	Procédure
n est-il premier ?	Tester les diviseurs premiers ≤ √n.
Combien de diviseurs ?	Décomposer n puis multiplier les exposants augmentés de 1.
PGCD/PPCM ?	Comparer les exposants des facteurs premiers.
Grande puissance modulo p ?	Réduire l'exposant modulo p−1 avec Fermat.
Inverse modulo p ?	Chercher u tel que au ≡ 1 [p], ou utiliser a^{p-2}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

10. Exercices flash

À savoir faire sans hésiter

1. Montrer que 127 est premier.
2. Décomposer 924 en facteurs premiers.
3. Calculer le nombre de diviseurs de $2^4 \times 3^2 \times 7$.
4. Résoudre $5x \equiv 2\ [13]$.
5. Calculer 3^{100} modulo 11.

Réponses

1. Tester 2,3,5,7,11 : aucun ne divise 127.
2. $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$.
3. $(4+1)(2+1)(1+1)=30$.
4. $5^{-1} \equiv 8\ [13]$, donc $x \equiv 16 \equiv 3\ [13]$.
5. $3^{10} \equiv 1\ [11]$, donc $3^{100} \equiv 1\ [11]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche de révision - Chapitre 8

Matrices : opérations et inverse

À savoir absolument

Une matrice est un tableau de nombres. En maths expertes, on doit savoir calculer avec les matrices, reconnaître les produits possibles, utiliser l'identité, calculer des déterminants et déterminer l'inversibilité.

1. Taille et coefficients

Une matrice A de taille $n \times p$ possède n lignes et p colonnes :

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le p}.$$

Le coefficient a_{ij} est ligne i, colonne j.

Deux matrices sont égales si elles ont même taille et mêmes coefficients :

$$A = B \iff \forall i, j,\ a_{ij} = b_{ij}.$$

2. Addition et réel

Opérations coefficient par coefficient :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Conditions : $A + B$ existe seulement si A et B ont la même taille.

3. Produit matriciel

Si A est $n \times p$ et B est $p \times q$, alors AB existe et est $n \times q$:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Méthode : ligne de A multipliée par colonne de B.

Point crucial

En général :

$$AB \neq BA.$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

4. Propriétés

Lorsque les produits existent :

$$A(BC) = (AB)C,$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Pour une matrice carrée :

$$A^0 = I_n, \qquad A^{k+1} = A^k A.$$

5. Identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour A de taille $n \times p$:

$$I_n A = A, \qquad A I_p = A.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

6. Inverse

Une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

L'inverse, si elle existe, est unique.

Équations matricielles

Si A est inversible :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

$$XA = B \iff X = BA^{-1}.$$

L'ordre de multiplication est essentiel.

7. Inverse d'une matrice 2×2

Pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

le déterminant est

$$\det(A) = ad - bc.$$

Critère :

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0.$$

Formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple rapide

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 6 - 5 = 1.$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Déterminant 3×3

Pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg).$$

Critère :

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0.$$

9. Propriétés des inverses

Si A et B sont inversibles :

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

10. Méthodes types

Calculer AB	Vérifier les dimensions, puis faire ligne i de A fois colonne j de B.
Prouver que $B = A^{-1}$	Calculer AB et BA, puis vérifier que les deux valent I_n.
Inverser une matrice 2×2	Calculer $ad - bc$. Si $ad - bc \neq 0$, appliquer la formule de l'inverse.
Conclure sur une matrice 3×3	Calculer le déterminant. Si $\det(A) \neq 0$, la matrice est inversible.
Résoudre $AX = B$	Multiplier à gauche par A^{-1} : $X = A^{-1}B$.

11. Erreurs fréquentes

— Oublier de vérifier les tailles avant un produit.
— Croire que $AB = BA$: c'est faux en général.
— Écrire une division par une matrice : on utilise une inverse, pas une division.
— Pour $(AB)^{-1}$, oublier l'ordre inversé : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
— Pour 2×2, oublier le signe moins dans $ad - bc$ ou dans la matrice inverse.

12. Mini-entraînement

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$ et AB.
2. Pour $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, calculer $\det(M)$ puis M^{-1} si elle existe.
3. Calculer le déterminant de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et conclure.

Réflexe de contrôle

Après avoir calculé une inverse A^{-1}, vérifier au moins un produit :

$$AA^{-1} = I_n.$$

C'est le meilleur moyen de repérer une erreur de signe ou de coefficient.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Chapitre 9

Matrices : applications

Compétences essentielles

Résoudre $AX = B$, modéliser une suite couplée, utiliser $X_n = A^n X_0$, traiter une relation affine et interpréter les coefficients d'une matrice dans un contexte concret.

1. Systèmes linéaires

Un système linéaire s'écrit :

$$AX = B.$$

Si A est inversible, alors l'unique solution est :

$$X = A^{-1}B.$$

Propriété

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = ad - bc.$$

Si $\det(A) \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Méthode

Résoudre $AX = B$: écrire A, X, B ; vérifier que A est inversible ; calculer A^{-1} ; conclure avec $X = A^{-1}B$.

Exemple

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 3y = -8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = -7, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Suites couplées

Une relation couplée :

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n, \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$$

s'écrit :

$$X_{n+1} = AX_n, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Propriété

Si $X_{n+1} = AX_n$, alors :

$$X_n = A^n X_0.$$

Méthode

Définir X_n, construire A, calculer ou exploiter A^n, puis multiplier par X_0.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad X_2 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Relation affine

Pour une relation :

$$X_{n+1} = AX_n + C,$$

un état d'équilibre L vérifie :

$$L = AL + C.$$

Si $I - A$ est inversible :

$$L = (I - A)^{-1}C.$$

En posant $Y_n = X_n - L$:

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad X_n = L + A^n(X_0 - L).$$

Attention

Dans $X_{n+1} = AX_n + C$, on ne peut pas écrire directement $X_n = A^n X_0$.

4. Puissances à connaître

Pour une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice triangulaire particulière :

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode

Pour prouver une formule de A^n : initialisation, hypothèse au rang n, calcul de $A^{n+1} = A^n A$, conclusion.

5. Modélisation concrète

Méthode

1. choisir l'ordre des grandeurs dans X_n ;
2. construire la matrice A ;
3. écrire $X_{n+1} = AX_n$ ou $X_{n+1} = AX_n + C$;
4. calculer l'état demandé ;
5. interpréter avec les unités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exemple

Migration entre deux zones :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} X_n.$$

Si $X_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$, alors

$$X_1 = \begin{pmatrix} 620 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

6. Erreurs fréquentes

— Utiliser A^{-1} sans vérifier que A est inversible.
— Inverser l'ordre du produit : $AB \neq BA$ en général.
— Confondre lignes et colonnes dans l'interprétation.
— Oublier le terme constant C dans une relation affine.
— Donner un résultat sans unité ni phrase de conclusion.

7. Mini-exercices

1. Résoudre $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$
2. Écrire sous forme matricielle : $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}2v_n$, $v_{n+1} = 0{,}4u_n + 0{,}8v_n$.
3. Calculer X_2 pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Réponses

1. $(x, y) = (3, 1)$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
3. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $X_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8. Formules clés

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$
$$X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^n X_0$$
$$X_{n+1} = AX_n + C, \quad L = AL + C$$
$$X_n = L + A^n(X_0 - L)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Chapitre 10 - Graphes et marches aléatoires

Terminale maths expertes - fiche de révision

Graphes orientés

Vocabulaire

- Un **sommet** est un point du graphe.
- Un **arc** est une liaison orientée : $S_i \to S_j$.
- Une **boucle** relie un sommet à lui-même.
- Un **chemin orienté** respecte le sens des arcs.
- La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arcs.

Un chemin de longueur n contient $n+1$ sommets écrits dans la suite.

Matrice d'adjacence

Pour un graphe orienté de sommets $S_1, \dots, S_p$, la matrice d'adjacence est

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le p}, \qquad a_{ij} = \text{nombre d'arcs de } S_i \text{ vers } S_j.$$

Lecture

- ligne i : arcs qui partent de S_i ;
- colonne j : arcs qui arrivent en S_j ;
- somme ligne i : nombre d'arcs sortants de S_i ;
- somme colonne j : nombre d'arcs entrants en S_j.

Méthode

1. Fixer l'ordre des sommets.
2. Placer en ligne le sommet de départ.
3. Placer en colonne le sommet d'arrivée.
4. Remplir a_{ij} avec le nombre d'arcs $S_i \to S_j$.

Puissances d'une matrice d'adjacence

Résultat fondamental

Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe, alors pour tout $n \ge 1$:

$(A^n)_{ij}$ = nombre de chemins de longueur n de S_i vers S_j.

Pour A^2 :

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} a_{kj}.$$

On somme sur tous les sommets intermédiaires S_k.

Pour compter des chemins

1. Construire A.
2. Calculer A^n.
3. Lire le coefficient ligne départ, colonne arrivée.

Marche aléatoire

Une marche aléatoire est un déplacement de sommet en sommet selon des probabilités.

Matrice de transition

Avec la convention des vecteurs-lignes :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

La ligne i donne les probabilités de transition depuis l'état i :

$$p_{ij} \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{p} p_{ij} = 1.$$

Une matrice de transition est donc une matrice **stochastique par lignes**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Évolution d'une loi

On note

$$U_n = (u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,p})$$

la loi de probabilité à l'étape n.

Formules indispensables

$$U_{n+1} = U_n P, \qquad U_n = U_0 P^n.$$

Interprétation
$u_{n,i}$ est la probabilité d'être dans l'état i après n transitions. Les coefficients de U_n sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1.

Probabilité d'un chemin

La probabilité de suivre un chemin donné est le produit des probabilités des arcs empruntés.
Exemple :

$$\mathbb{P}(A \to B \to C \to A) = p_{AB} p_{BC} p_{CA}.$$

Loi stationnaire

Définition
Une loi $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ est stationnaire si :

$$\pi P = \pi \qquad \text{et} \qquad \pi_1 + \cdots + \pi_p = 1.$$

Si $U_0 = \pi$, alors $U_n = \pi$ pour tout entier n.

Méthode

1. Poser $\pi = (x_1, \dots, x_p)$.
2. Écrire $\pi P = \pi$.
3. Ajouter $x_1 + \cdots + x_p = 1$.
4. Résoudre le système.

Exemple type

Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Chercher une loi stationnaire $\pi = (x, y)$ revient à résoudre :

$$(x, y)P = (x, y), \qquad x + y = 1.$$

D'où

$$0{,}7x + 0{,}4y = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}3x = 0{,}4y.$$

Avec $x + y = 1$, on obtient :

$$x = \frac{4}{7}, \qquad y = \frac{3}{7}.$$

Donc

$$\pi = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Erreurs fréquentes

— Confondre ligne et colonne dans une matrice d'adjacence.
— Lire A^n comme un graphe : A^n compte des chemins, ce n'est pas une nouvelle matrice d'arcs directs.
— Oublier que la longueur d'un chemin est le nombre d'arcs.
— Oublier de vérifier que chaque ligne d'une matrice de transition somme à 1.
— Mélanger les conventions vecteur-ligne et vecteur-colonne.

Mini-exercices

1. Si $(A^4)_{23} = 7$, alors il existe 7 chemins de longueur 4 allant de S_2 vers S_3.
2. Si

$$U_0 = (1, 0), \quad P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix},$$

alors

$$U_1 = U_0 P = (0{,}8, 0{,}2).$$

3. Pour vérifier qu'une loi π est stationnaire, on calcule πP et on vérifie que $\pi P = \pi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Synthèse express

Notion	À retenir
Graphe orienté	Les arcs ont un sens : $S_i \to S_j$.
Matrice d'adjacence	a_{ij} compte les arcs de S_i vers S_j.
Puissance A^n	$(A^n)_{ij}$ compte les chemins de longueur n de S_i vers S_j.
Matrice de transition	p_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.
Loi après n étapes	$U_n = U_0 P^n$.
Loi stationnaire	$\pi P = \pi$ et la somme des coefficients de π vaut 1.

Plan de résolution standard

1. Identifier les états ou sommets.
2. Choisir un ordre fixe : cet ordre doit rester le même partout.
3. Construire la matrice adaptée : adjacency si on compte des chemins, transition si on calcule des probabilités.
4. Utiliser la formule adaptée : $(A^n)_{ij}$ ou $U_n = U_0 P^n$.
5. Interpréter le résultat avec une phrase complète.

Phrase de conclusion type

Le coefficient situé ligne i, colonne j de A^n vaut k, donc il existe k chemins de longueur n allant de S_i vers S_j.

Phrase de conclusion type

Le vecteur $U_n = (u_1, \ldots, u_p)$ donne la loi après n étapes : la probabilité d'être dans l'état i est u_i.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)