MathLvl

Fiches de révision de maths

Terminale spé maths

15 fiches, dans l'ordre du programme

Sommaire

1. Combinatoire et dénombrement p. 2
2. Suites : récurrence et limites p. 5
3. Limites de fonctions p. 8
4. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires p. 11
5. Compléments sur la dérivation p. 14
6. Fonction logarithme népérien p. 17
7. Fonction exponentielle p. 20
8. Fonctions trigonométriques p. 23
9. Primitives et équations différentielles p. 26
10. Calcul intégral p. 29
11. Géométrie dans l'espace (vecteurs) p. 32
12. Droites et plans dans l'espace p. 35
13. Probabilités conditionnelles et indépendance p. 38
14. Variables aléatoires (lois) p. 40
15. Concentration et loi des grands nombres p. 46

mathlvl.fr — Fiches gratuites. Toute reproduction, diffusion ou revente, même partielle, est interdite.

Fiche de révision - Combinatoire et dénombrement

Terminale spécialité mathématiques - permutations, combinaisons, coefficients binomiaux

Idée centrale. Dénombrer, c'est compter sans tout écrire. Pour choisir la bonne formule, poser toujours ces deux questions : **l'ordre compte-t-il ?** et **les répétitions sont-elles possibles ?**

1. Règles de base

Principe additif. Si les cas sont disjoints, on additionne :

$$|A \cup B| = |A| + |B| \quad (A \cap B = \varnothing).$$

Principe multiplicatif. Si un choix se fait en étapes successives, on multiplie :

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p.$$

Complémentaire. Pour « au moins un », « aucun », « pas tous », compter souvent le contraire :

$$\text{nombre cherché} = \text{total} - \text{contraire}.$$

Exemple : codes de 4 chiffres contenant au moins un 0 : $10^4 - 9^4$.

2. Tableau des formules essentielles

Situation	Comment reconnaître ?	Nombre de possibilités
p-uplet avec répétition	Ordre important ; répétitions autorisées.	n^p
p-liste d'éléments distincts	Ordre important ; pas de répétition.	$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	On range tous les n éléments une seule fois.	$n!$
Combinaison / partie à p éléments	Ordre sans importance ; pas de répétition.	$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Toutes les parties d'un ensemble	Chaque élément est choisi ou non choisi.	2^n

Factorielle. $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ et $0! = 1$. Exemples : $4! = 24$, $5! = 120$.

3. Coefficients binomiaux

Définition. Si E a n éléments, le nombre de parties de E contenant p éléments est :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

On lit « p parmi n ». C'est un **choix sans ordre**.

Valeurs à connaître.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Symétrie :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Choisir p éléments revient à exclure les $n - p$ autres.

Relation de Pascal.

$$\boxed{\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}}$$

Interprétation : pour choisir p éléments parmi $n+1$, on fixe un élément. Soit il est choisi, soit il ne l'est pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Triangle de Pascal et formule du binôme

Triangle de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Chaque coefficient est la somme des deux du dessus.

Formule du binôme.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Exemple :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Somme des coefficients binomiaux.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Cela compte toutes les parties possibles d'un ensemble à n éléments.

5. Choisir vite la bonne méthode

Mot-clé dans l'énoncé	Interprétation	Formule
code, mot, tirage avec remise	ordre important, répétition possible	n^p
classement, podium, sans remise	ordre important, éléments distincts	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
rangements de tous les objets	permutation	$n!$
comité, groupe, main de cartes	ordre sans importance	$\binom{n}{p}$
au moins un, aucun, pas tous	complémentaire	total − contraire
catégories imposées	choix dans chaque catégorie	produit de $\binom{n}{p}$

6. Méthodes types à maîtriser

Choisir puis ordonner. Quand on sélectionne p éléments puis qu'on leur attribue des rôles :

$$\binom{n}{p} \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple : président, secrétaire, trésorier parmi 20 élèves : $\binom{20}{3}3!$.

Séparer en cas disjoints. Si plusieurs situations ne se recoupent pas, on compte chaque cas puis on additionne. Si elles se recoupent, attention au double comptage.

Plusieurs catégories. Choisir exactement 2 filles parmi 11 et 3 garçons parmi 14 :

$$\binom{11}{2}\binom{14}{3}.$$

Choisir au moins une fille dans un groupe de 3 parmi 8 filles et 10 garçons :

$$\binom{18}{3} - \binom{10}{3}.$$

7. Exemples rapides

1. Codes à 5 chiffres : 10^5.
2. Codes à 5 chiffres tous distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$.
3. Choisir 4 élèves parmi 28 : $\binom{28}{4}$.
4. Former un podium parmi 12 coureurs : $12 \times 11 \times 10$.
5. Main de 5 cartes dans un jeu de 32 : $\binom{32}{5}$.
6. Anagrammes de ANANAS : $\dfrac{6!}{3!2!1!} = 60$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

8. Erreurs classiques à éviter

— Confondre **choisir** et **ordonner** : un comité n'est pas un podium.
— Oublier que « distincts » signifie **sans répétition**.
— Utiliser $\binom{n}{p}$ alors que l'ordre compte.
— Additionner des cas qui ne sont pas disjoints : risque de compter deux fois.
— Oublier le complémentaire dans les questions « au moins un ».
— Croire que $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!}$: il manque le facteur $(n-p)!$.

9. Mini-exercices d'entraînement

1. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. Combien de tirages successifs de 3 boules avec remise ?
2. Même question sans remise.
3. Combien de groupes de 3 élèves peut-on former dans une classe de 24 élèves ?
4. Combien de façons de choisir 2 filles parmi 11 et 3 garçons parmi 14 ?
5. Combien de codes de 4 chiffres contiennent au moins un chiffre 7 ?
6. Dans le développement de $(x+2)^5$, quel est le coefficient de x^3 ?
7. Combien de parties possède un ensemble à 8 éléments ?
8. Combien de mots de 4 lettres peut-on former avec les lettres A, B, C, D, E si aucune lettre ne se répète ?

Corrections rapides.

1. 9^3.
2. $9 \times 8 \times 7$.
3. $\binom{24}{3}$.
4. $\binom{11}{2}\binom{14}{3}$.
5. $10^4 - 9^4$.
6. $\binom{5}{2}2^2 = 40$.
7. $2^8 = 256$.
8. $5 \times 4 \times 3 \times 2$.

10. Carte mentale express

Question	Réponse	Formule
Ordre compte et répétition possible ?	oui	n^p
Ordre compte et éléments distincts ?	oui	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
On range tous les éléments ?	oui	$n!$
Ordre sans importance ?	oui	$\binom{n}{p}$
Toutes les sous-parties ?	oui	2^n

À retenir pour rédiger. Une réponse complète explique la formule utilisée : ordre ou non, répétition ou non, étapes successives ou cas disjoints. En dénombrement, la justification compte autant que le calcul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Suites

Récurrence, limites et convergence

Terminale spécialité mathématiques

1. Définitions rapides

Une suite réelle est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. On note (u_n) et u_n le terme de rang n.

- **Explicite** : $u_n = f(n)$.
- **Récurrente** : u_0 donné et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Monotonie et bornes

- Croissante : $u_{n+1} \geq u_n$.
- Décroissante : $u_{n+1} \leq u_n$.
- Majorée : $u_n \leq M$ pour tout n.
- Minorée : $u_n \geq m$ pour tout n.
- Bornée : majorée et minorée.

Méthodes pour la monotonie

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si $u_{n+1} = f(u_n)$, étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle où sont les termes.

3. Récurrence : rédaction type

Pour prouver $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : soit $k \geq n_0$. Supposer $P(k)$ vraie et démontrer $P(k+1)$.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Pièges en récurrence

- Ne pas oublier le rang initial.
- Dans l'hérédité, ne pas supposer la propriété vraie pour tout n.
- La conclusion doit préciser « pour tout $n \geq n_0$ ».

Exemple récurrence

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Montrer $u_n = 4 \cdot 2^n - 3$.

- Initialisation : $4 \cdot 2^0 - 3 = 1 = u_0$.
- Hérédité : si $u_k = 4 \cdot 2^k - 3$, alors

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 4 \cdot 2^{k+1} - 3.$$

Donc la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Encadrement par récurrence

Pour montrer $a \leq u_n \leq b$:

1. vérifier au rang initial ;
2. supposer $a \leq u_k \leq b$;
3. utiliser la croissance de la fonction, une inégalité ou un calcul pour obtenir $a \leq u_{k+1} \leq b$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Limites de suites : formules et méthodes

5. Sens d'une limite

— $u_n \to \ell$: les termes deviennent aussi proches que voulu de ℓ.

— $u_n \to +\infty$: les termes finissent par dépasser tout réel A.

— $u_n \to -\infty$: les termes finissent par être inférieurs à tout réel A.

Une suite converge seulement si sa limite est réelle et finie.

6. Limites usuelles

Pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Suites géométriques :

$$\begin{cases} -1 < q < 1 & \Rightarrow q^n \to 0, \\ q = 1 & \Rightarrow q^n \to 1, \\ q > 1 & \Rightarrow q^n \to +\infty, \\ q \leq -1 & \Rightarrow (q^n) \text{ n'a pas de limite.} \end{cases}$$

7. Opérations

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to m$, avec $\ell, m \in \mathbb{R}$:

$$u_n + v_n \to \ell + m, \qquad u_n v_n \to \ell m.$$

Si $m \neq 0$:

$$\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{m}.$$

Formes indéterminées

Attention aux formes :

$$+\infty - \infty, 0 \times \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}.$$

Il faut transformer l'expression.

Quotient de polynômes

Pour

$$\frac{a_p n^p + \cdots}{b_q n^q + \cdots},$$

comparer les degrés :

— $p < q$: limite 0 ;

— $p = q$: limite $\dfrac{a_p}{b_q}$;

— $p > q$: limite infinie ou pas de limite selon le signe dominant.

Exemple : terme dominant

$$\frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + n} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} \to \frac{3}{2}.$$

Racines : quantité conjuguée

Pour $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, multiplier par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \to \frac{1}{2}.$$

8. Comparaison

À partir d'un certain rang :

— si $u_n \leq v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$;

— si $v_n \leq u_n$ et $u_n \to -\infty$, alors $v_n \to -\infty$.

9. Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

et si $u_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$, alors :

$$v_n \to \ell.$$

Exemple :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin n}{n} \to 0.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Théorèmes de convergence et suites récurrentes

10. Convergence monotone

— Toute suite croissante et majorée converge.
— Toute suite décroissante et minorée converge.

Ce théorème prouve l'existence de la limite, pas sa valeur.

11. Divergence par monotonie

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Méthode : prouver une convergence

Pour une suite récurrente :
1. Montrer un encadrement par récurrence.
2. Montrer une monotonie.
3. Conclure avec convergence monotone.
4. Trouver la limite avec l'équation limite.

12. Cas $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $u_n \to \ell$ et si f est continue, alors :

$$\ell = f(\ell).$$

Cette équation donne seulement les limites possibles. Il faut avoir prouvé la convergence avant.

Exemple complet

$u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$.
— On montre par récurrence que $u_n \leq 3$.
— $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3 - u_n}{2} \geq 0$: suite croissante.
— Croissante et majorée : elle converge vers ℓ.
— $\ell = \dfrac{\ell + 3}{2}$, donc $\ell = 3$.

Erreurs très fréquentes

— Bornée ne veut pas dire convergente : $(-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.
— Ne pas écrire $\ell = f(\ell)$ avant d'avoir établi la convergence.
— Ne pas confondre « tend vers $+\infty$ » et « converge ».

13. Recherche de seuil

Chercher un seuil, c'est trouver un rang N à partir duquel une propriété est vraie. Exemple : trouver le premier n tel que $0,9^n < 0,01$.

$n \leftarrow 0$, $u \leftarrow 1$
Tant que $u \geq 0,01$:
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow 0,9u$
Afficher n

Checklist d'exercice

1. La suite est-elle explicite ou récurrente ?
2. Faut-il prouver une propriété pour tout n ? $\Rightarrow$ récurrence.
3. Limite directe ou forme indéterminée ?
4. Peut-on encadrer ? $\Rightarrow$ gendarmes.
5. Monotone et bornée ? $\Rightarrow$ convergence.
6. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et convergence acquise : résoudre $\ell = f(\ell)$.

Mini-formules à retenir

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p > 0)$,
$|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$,
$q > 1 \Rightarrow q^n \to +\infty$,
croissante + majorée $\Rightarrow$ convergente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiche de révision - Limites de fonctions

Terminale spécialité mathématiques

1. Notations essentielles

Limite finie

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de ℓ lorsque x se rapproche de a ou devient très grand.

Limite infinie

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement grandes, positives ou négatives.

Limites latérales

$$\lim_{x\to a^-} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Si les deux limites latérales sont égales, la limite en a existe. Si elles sont différentes, la limite en a n'existe pas.

Point clé. La limite décrit le comportement de $f(x)$ autour de a, pas forcément la valeur $f(a)$.

2. Limites usuelles à connaître

Puissances

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Inverses

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Pour n pair :

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

Racine et exponentielle

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Croissances comparées

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

3. Opérations sur les limites

Si $\lim f = L$ et $\lim g = M$, alors :

$$\lim(f+g) = L + M, \qquad \lim(fg) = LM.$$

Si $M \neq 0$:

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{L}{M}.$$

Cas avec l'infini

Situation	Résultat
$L + \infty$	$+\infty$
$L - \infty$	$-\infty$
$L > 0$ **et** $g \to +\infty$	$fg \to +\infty$
$L < 0$ **et** $g \to +\infty$	$fg \to -\infty$
$L > 0$ **et** $g \to 0^+$	$\frac{L}{g} \to +\infty$
$L > 0$ **et** $g \to 0^-$	$\frac{L}{g} \to -\infty$

4. Formes indéterminées

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

Ces formes ne permettent pas de conclure directement.

Réflexes

1. Factoriser par le terme dominant.
2. Simplifier une fraction si une factorisation est possible.
3. Utiliser l'expression conjuguée avec les racines.
4. Étudier les signes à gauche et à droite si un dénominateur tend vers 0.
5. Utiliser comparaison ou encadrement.

5. Comparaison et encadrement

Comparaison

Si $f(x) \geq g(x)$ et $g(x) \to +\infty$, alors $f(x) \to +\infty$.
Si $f(x) \leq g(x)$ et $g(x) \to -\infty$, alors $f(x) \to -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

et si

$$\lim u(x) = \lim v(x) = \ell,$$

alors

$$\lim f(x) = \ell.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Méthodes types

6. Calculer une limite en l'infini

Polynôme

Un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré.

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x^3+5x^2-1) = +\infty.$$

Justification : $-2x^3 \to +\infty$ quand $x \to -\infty$.

Quotient de polynômes

$$\frac{ax^n+\cdots}{bx^p+\cdots} \sim \frac{a}{b}x^{n-p}.$$

Degrés	Limite en $\pm\infty$
$n < p$	0
$n = p$	$\dfrac{a}{b}$
$n > p$	infinie ou finie selon x^{n-p} et le signe de $\dfrac{a}{b}$

Exemple.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+4} = 3.$$

Expression avec exponentielle

La fonction exponentielle domine toute puissance de x en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^4} = +\infty.$$

7. Calculer une limite en un point

Substitution directe

Si l'expression est définie en a et construite avec des fonctions continues :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemple :

$$\lim_{x\to 2} (x^2+3x-1) = 9.$$

Forme $\frac{0}{0}$

On factorise puis on simplifie.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \quad (x\neq 3).$$

Donc

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6.$$

Expression avec racine

On multiplie par le conjugué.

$$\sqrt{x+1}-1 = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Dénominateur qui tend vers 0

On étudie les signes de chaque côté.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Méthode rapide. Numérateur non nul + dénominateur qui tend vers 0 : étudier le signe du dénominateur à gauche et à droite.

8. Asymptotes

Asymptote horizontale

Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell,$$

alors la courbe de f admet la droite

$$y = \ell$$

comme asymptote horizontale du côté considéré.

Asymptote verticale

Si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty,$$

alors la courbe de f admet la droite

$$x = a$$

comme asymptote verticale.

Ne pas confondre : asymptote horizontale $y = \ell$; asymptote verticale $x = a$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réflexes, pièges et entraînement

9. Tableau express de décisions

Situation	Réflexe	Conclusion fréquente
Polynôme en $\pm\infty$	Regarder le terme dominant	Limite du terme dominant
Quotient de polynômes	Comparer les degrés	0, coefficient dominant ou $\pm\infty$
Dénominateur $\to 0$	Étudier le signe à gauche et à droite	Limite infinie possible
Forme $\frac{0}{0}$	Factoriser, simplifier, conjugué	Limite finie possible
Forme $\frac{\infty}{\infty}$	Factoriser par les puissances dominantes	Comparer les degrés
Expression avec e^x	Utiliser les croissances comparées	e^x domine les puissances
Encadrement	Chercher deux bornes de même limite	Théorème des gendarmes

10. Erreurs fréquentes

— Dire que $\frac{0}{0} = 0$ ou que $\frac{\infty}{\infty} = 1$.
— Oublier les limites à gauche et à droite.
— Confondre $x = a$ et $y = \ell$ pour une asymptote.
— Remplacer x par une valeur interdite sans simplifier.
— Oublier le signe d'un dénominateur qui tend vers 0.
— Conclure trop vite dans une forme indéterminée.

11. Checklist avant de conclure

1. Le point étudié est-il $+\infty$, $-\infty$, a, a^- ou a^+ ?
2. Ai-je reconnu une limite usuelle ?
3. L'expression donne-t-elle une forme indéterminée ?
4. Puis-je factoriser, simplifier ou conjuguer ?
5. Si un dénominateur tend vers 0, ai-je étudié le signe ?
6. La limite permet-elle d'identifier une asymptote ?

12. Mini-entraînement corrigé

Limite	Résultat
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-1}{x^2+4}$	3
$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-2x)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$	4
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$	0
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2}{x-1}$	$+\infty$

13. À savoir rédiger

Exemple de rédaction courte.

$$\frac{2x^2-5}{x^2+1} = \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Or $\frac{5}{x^2} \to 0$ et $\frac{1}{x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5}{x^2+1} = 2.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fiches de révisions — Chapitre 4
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 1 — Les notions à connaître

1. Continuité : idée simple

Une fonction est **continue** sur un intervalle quand sa courbe se trace « sans lever le crayon » : pas de trou, pas de saut, pas d'explosion verticale à l'intérieur de l'intervalle.
Version mathématique : f est continue en a lorsque

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Elle est continue sur un intervalle si elle est continue en chacun de ses points.

2. Fonctions continues à reconnaître vite

Sont continues sur leur ensemble de définition :
- les fonctions polynômes ;
- les fonctions rationnelles là où le dénominateur n'est pas nul ;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$;
- exp, ln sur $]0; +\infty[$, sin, cos ;
- les sommes, produits, quotients autorisés et composées de fonctions continues.

À retenir : si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle y est continue.

3. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f continue sur $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

Traduction : si une courbe continue passe d'une valeur à une autre, elle prend toutes les valeurs entre les deux.

4. Corollaire : existence et unicité

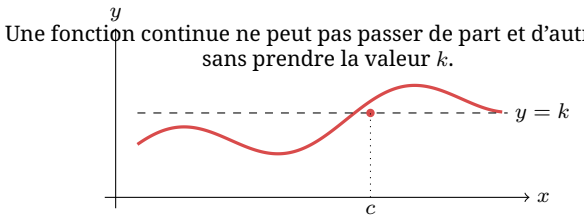
Si f est **continue et strictement monotone** sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation

$$f(x) = k$$

admet une **unique** solution sur $[a; b]$.
Pourquoi ? Le TVI donne l'existence, la stricte monotonie empêche d'avoir deux antécédents différents.

Ce qu'il faut distinguer

Existence	Il y a au moins une solution. Le TVI suffit souvent.
Unicité	Il y a exactement une solution. Il faut en plus un argument comme la stricte monotonie.
Encadrement	On ne donne pas forcément la valeur exacte : on peut prouver que la solution est dans $[u; v]$.



Une fonction continue ne peut pas passer de part et d'autre de k sans prendre la valeur k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 4
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 2 — Les méthodes de rédaction

Méthode A — Prouver qu'une équation a une solution

Objectif : montrer que $f(x) = k$ a au moins une solution sur $[a; b]$.
1. Vérifier que f est continue sur $[a; b]$.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
3. Vérifier que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Conclure avec le TVI : il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Rédaction type pour l'existence

La fonction f est continue sur $[a; b]$ car ...
On a $f(a) = \ldots$ et $f(b) = \ldots$. Or k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Méthode B — Prouver qu'il y a une unique solution

Objectif : montrer que $f(x) = k$ a exactement une solution.
1. Prouver l'existence avec le TVI.
2. Prouver que f est strictement monotone sur l'intervalle : tableau de variations, dérivée strictement positive/négative, ou argument connu.
3. Conclure avec le corollaire du TVI.

Rédaction type pour l'unicité

De plus, f est strictement croissante/décroissante sur $[a; b]$.
Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a; b]$.

Méthode C — Utiliser $g(x) = f(x) - k$

Résoudre $f(x) = k$, c'est résoudre

$$g(x) = 0 \quad \text{avec} \quad g(x) = f(x) - k.$$

On applique alors le TVI à g avec la valeur 0. C'est souvent plus simple, car on cherche un changement de signe :

$$g(a) \leq 0 \leq g(b) \quad \text{ou} \quad g(b) \leq 0 \leq g(a).$$

Méthode D — Encadrer une solution par dichotomie

On sait qu'une solution est dans $[a; b]$.
1. Calculer le milieu $m = \dfrac{a+b}{2}$.
2. Regarder le signe de $g(m)$, où $g = f - k$.
3. Garder la moitié de l'intervalle où le changement de signe est conservé.
4. Recommencer jusqu'à obtenir l'encadrement demandé.

But : obtenir par exemple $0{,}68 < \alpha < 0{,}69$, pas forcément la valeur exacte de α.

Pièges classiques à éviter

— Oublier de dire que f est continue.
— Appliquer le TVI sur un intervalle qui n'est pas un segment $[a; b]$.
— Dire « une solution » alors qu'on a seulement prouvé « au moins une solution ».
— Confondre « fonction monotone » et « fonction strictement monotone ».
— Utiliser la dérivée pour prouver la continuité : c'est possible seulement si la fonction est bien dérivable sur l'intervalle.
— Oublier que $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$, et que les quotients imposent un dénominateur non nul.

Mini-exemple rédigé

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.
Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. La fonction f est continue sur $[0; 1]$ car c'est une fonction polynôme. De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Or 0 est compris entre -1 et 1. D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.
Enfin, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $[0; 1]$, donc f est strictement croissante. Par le corollaire du TVI, cette solution est unique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 4
Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 3 — Exercices types corrigés

Exercice type 1 — Existence

Énoncé. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.
Correction. Posons $g(x) = \cos x - x$. La fonction g est continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues.
On a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos(1) - 1 < 0$. Donc 0 est compris entre $g(0)$ et $g(1)$.
D'après le TVI, il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$, donc $\cos c = c$.

Exercice type 2 — Unicité

Énoncé. Montrer que $\cos x = x$ admet une unique solution sur $[0;1]$.
Correction. On reprend $g(x) = \cos x - x$. On a déjà prouvé l'existence. De plus,

$$g'(x) = -\sin x - 1 < 0$$

sur $[0;1]$. Donc g est strictement décroissante sur $[0;1]$. Par le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

Exercice type 3 — Encadrement

Pour $f(x) = x^3 + x - 1$, on a prouvé qu'il existe une unique solution α sur $[0;1]$.
Calculs :

$$f(0{,}68) = 0{,}68^3 + 0{,}68 - 1 \approx -0{,}0056 < 0,$$

$$f(0{,}69) = 0{,}69^3 + 0{,}69 - 1 \approx 0{,}0185 > 0.$$

Comme f est continue, le TVI donne une solution dans $[0{,}68;0{,}69]$.
Comme la solution est unique :

$$0{,}68 < \alpha < 0{,}69.$$

Exercice type 4 — Lire un tableau de variations

Énoncé. Une fonction f est continue et strictement croissante sur $[2;5]$, avec $f(2) = -3$ et $f(5) = 7$. Combien l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle de solutions ?
Correction. Le réel 1 est compris entre -3 et 7. Comme f est continue sur $[2;5]$, le TVI donne au moins une solution. Comme f est strictement croissante, cette solution est unique.
Réponse : exactement une solution sur $[2;5]$.

Contre-exemple à connaître

Définissons

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc 0 est entre les deux valeurs. Pourtant l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.
Pourquoi ? La fonction n'est pas continue sur $[-1;1]$. Le TVI ne s'applique pas.

Checklist avant de conclure

Avant d'écrire « donc l'équation a une solution », vérifier :
1. l'intervalle est bien un segment $[a;b]$;
2. la fonction est continue sur tout le segment ;
3. la valeur cherchée est bien entre les deux valeurs aux bornes ;
4. pour l'unicité, la fonction est strictement monotone.

Phrase finale à mémoriser

Comme f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, et comme k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 5
Compléments sur la dérivation

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 1 — Dériver une fonction composée

1. Composée : idée

Une fonction composée est une fonction dans une fonction :

$$f(x) = v(u(x)).$$

On applique d'abord u, puis v.
Exemples :
— $(3x-1)^5$: $u(x) = 3x-1$, $v(X) = X^5$.
— e^{x^2+2} : $u(x) = x^2+2$, $v(X) = \mathrm{e}^X$.
— $\sqrt{4-x}$: $u(x) = 4-x$, $v(X) = \sqrt{X}$.

2. Formule clé

Si u et v sont dérivables :

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'}$$

Donc

$$\boxed{\big(v(u(x))\big)' = u'(x)v'(u(x))}.$$

Phrase à retenir : **on dérive l'extérieur, on garde l'intérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur**.

3. Formules rapides

Fonction	Dérivée
$[u]^n$	$nu'[u]^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$

4. Méthode en 4 lignes

Pour dériver $f(x) = v(u(x))$:
1. identifier $u(x)$;
2. écrire $u'(x)$;
3. dériver la fonction extérieure v ;
4. écrire $f'(x) = u'(x)v'(u(x))$.

5. Exemples corrigés

$$((2x+1)^6)' = 12(2x+1)^5,$$
$$(\mathrm{e}^{x^2-3x})' = (2x-3)\mathrm{e}^{x^2-3x},$$
$$(\sqrt{5x-1})' = \frac{5}{2\sqrt{5x-1}},$$
$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

6. Piège classique

Ne pas oublier le facteur u'.

$$(4x-7)^3 \neq 3(4x-7)^2.$$

La bonne réponse est :

$$(4x-7)^{3\prime} = 3 \times 4(4x-7)^2 = 12(4x-7)^2.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 5
Compléments sur la dérivation

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 2 — Variations, dérivée seconde, convexité

1. Variations avec f'

Pour étudier les variations de f :
1. calculer $f'(x)$;
2. étudier le signe de f' ;
3. conclure :

$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ croissante}, \qquad f' < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}.$$

Si f' passe de $+$ à $-$: maximum local. Si f' passe de $-$ à $+$: minimum local.

2. Exemple de variations

Soit $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x).$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de f' est celui de $1-x$.
Donc f est croissante sur $]-\infty, 1]$, puis décroissante sur $[1, +\infty[$.
Maximum : $f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3. Dérivée seconde

La dérivée seconde est la dérivée de la dérivée :

$$\boxed{f'' = (f')'}.$$

Elle indique comment varie la pente.
— $f'' > 0$: les pentes augmentent.
— $f'' < 0$: les pentes diminuent.

4. Convexité

Pour une fonction deux fois dérivable :

$$\boxed{f'' \geq 0 \Rightarrow f \text{ convexe}}$$

$$\boxed{f'' \leq 0 \Rightarrow f \text{ concave}}$$

Idée visuelle :
— convexe : forme de bol ;
— concave : forme de pont.

5. Point d'inflexion

Un point d'inflexion est un point où la fonction change de convexité.
Méthode :
1. calculer f'' ;
2. résoudre $f''(x) = 0$;
3. vérifier que f'' change de signe ;
4. donner le point $(a ; f(a))$.

6. Exemple convexité

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \qquad f''(x) = 6x - 6.$$

$f'' < 0$ si $x < 1$: f est concave.
$f'' > 0$ si $x > 1$: f est convexe.
f'' change de signe en 1 : point d'inflexion en

$$(1 ; f(1)) = (1 ; 0).$$

7. Erreur à éviter

$f''(a) = 0$ ne suffit pas pour avoir un point d'inflexion. Il faut un **changement de signe** de f''.
Exemple : $f(x) = x^4$. Alors $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. Pas de changement de signe en 0, donc pas de point d'inflexion.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 5
Compléments sur la dérivation

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 3 — Méthodes type bac et mini-exercices

1. Plan type : étude de fonction

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes si demandé.
3. Dérivée f'.
4. Signe de f'.
5. Tableau de variations.
6. Dérivée seconde f'' si convexité.
7. Signe de f'', intervalles de convexité, points d'inflexion.

2. Lecture graphique

On sait que	On conclut
$f' > 0$	f croît
$f' < 0$	f décroît
f' croît	f convexe
f' décroît	f concave
$f'' > 0$	f convexe
$f'' < 0$	f concave
f'' change de signe	inflexion

3. Convexité et tangente

Si f est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes :

$$\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}.$$

Exemple : comme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geq 1 + x}.$$

4. Mini-exercice corrigé 1

Dériver $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+3x}$.
Correction :

$$u(x) = -2x^2 + 3x, \quad u'(x) = -4x + 3.$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = (-4x+3)\mathrm{e}^{-2x^2+3x}}.$$

5. Mini-exercice corrigé 2

Étudier les variations de $g(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.
Correction :

$$g'(x) = \mathrm{e}^x + (x-2)\mathrm{e}^x = (x-1)\mathrm{e}^x.$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, g' a le signe de $x-1$.
Donc g est décroissante sur $]-\infty, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$.
Minimum :

$$g(1) = -\mathrm{e}.$$

6. Mini-exercice corrigé 3

Étudier la convexité de $h(x) = x^4 - 2x^2$.
Correction :

$$h'(x) = 4x^3 - 4x, \qquad h''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1).$$

$h''(x) = 0 \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
$h'' > 0$ sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$: h est convexe.
$h'' < 0$ sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$: h est concave.
Il y a deux points d'inflexion, car h'' change de signe aux deux valeurs.

7. Checklist avant contrôle

Je sais :
— repérer u dans $v(u(x))$;
— dériver u^n, $\sqrt{u}$, e^u, $1/u$;
— faire un tableau de signes de f' ;
— conclure correctement sur les variations ;
— calculer f'' ;
— déduire convexité, concavité et points d'inflexion.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 6
Fonction logarithme népérien

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 1 — Définition, courbe, propriétés

1. Définition

Pour $a > 0$, $\ln(a)$ est l'unique réel x tel que

$$\mathrm{e}^x = a.$$

Donc

$$\boxed{\ln(a) = x \iff \mathrm{e}^x = a} \quad (a > 0).$$

Domaine : $\ln(x)$ existe seulement si $x > 0$.

2. Relations avec exp

$$\boxed{\mathrm{e}^{\ln(x)} = x \quad (x > 0)}$$

$$\boxed{\ln(\mathrm{e}^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{\ln(1) = 0}, \qquad \boxed{\ln(\mathrm{e}) = 1}.$$

À retenir : ln et exp sont réciproques.

3. Variations et limites

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad (x > 0)$$

Comme $1/x > 0$, ln est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}, \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}.$$

Asymptote verticale : $x = 0$.

4. Courbe



La courbe passe par $(1, 0)$ et $(\mathrm{e}, 1)$.

5. Propriétés algébriques

Pour $a > 0$, $b > 0$:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln(a^n) = n \ln a}, \qquad \boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a}.$$

6. Piège majeur

$$\ln(a + b) \neq \ln a + \ln b$$

$$\ln(a - b) \neq \ln a - \ln b$$

Les formules concernent les **produits, quotients et puissances**, pas les sommes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 6
Fonction logarithme népérien

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 2 — Équations, inéquations, dérivées

1. Résoudre avec ln

Pour $a > 0$, $b > 0$:

$$\boxed{\ln(a) = \ln(b) \iff a = b}$$

$$\boxed{\ln(a) < \ln(b) \iff a < b}$$

car ln est strictement croissante. Pour $k \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\ln(a) = k \iff a = \mathrm{e}^k}.$$

2. Méthode équation

1. Conditions : chaque argument de ln doit être > 0.
2. Transformer avec les propriétés si utile.
3. Enlever ln avec la croissance/réciproque.
4. Résoudre.
5. Vérifier les conditions.

Ex. $\ln(2x-1) = 3$: $x > 1/2$ et $2x - 1 = \mathrm{e}^3$, donc

$$\boxed{x = \frac{\mathrm{e}^3 + 1}{2}}.$$

3. Dérivée de $\ln(u)$

Si u est dérivable et $u > 0$:

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}.$$

Exemples :

$$(\ln(3x+1))' = \frac{3}{3x+1},$$

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1},$$

$$(\ln(5-x))' = -\frac{1}{5-x}.$$

4. Produits et quotients

$$(x \ln x)' = \ln x + 1.$$

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

On utilise les règles produit/quotient en plus de $(\ln x)' = 1/x$.

5. Étudier une fonction avec ln

1. Domaine : argument(s) > 0.
2. Limites : $\ln x \to -\infty$ en 0^+, $\ln x \to +\infty$ en $+\infty$.
3. Dérivée : souvent $(\ln u)' = u'/u$.
4. Signe de f'.
5. Tableau de variations.

6. Exemple de variations

$f(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Comme $x^2 + 1 > 0$, le signe de f' est celui de x. Donc f est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$, et son minimum est

$$f(0) = \ln(1) = 0.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 6
Fonction logarithme népérien

Terminale spécialité mathématiques

Fiche 3 — Limites, applications, réflexes

1. Croissances comparées

Pour tout $n > 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0}.$$

En particulier :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0}, \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}.$$

2. Formes indéterminées

Avec ln, repérer :

$$0\times(-\infty), \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad +\infty - +\infty.$$

Réflexe : isoler un terme dominant ou utiliser les croissances comparées.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x - 5}{x} = 0.$$

3. Équations exponentielles

ln permet de faire descendre l'inconnue placée en exposant.

$$\mathrm{e}^{2x-1} = 7 \iff 2x-1 = \ln 7 \iff \boxed{x = \frac{\ln 7 + 1}{2}}.$$

4. Modèle exponentiel

Si $N(t) = N_0\mathrm{e}^{kt}$ et si l'on cherche $N(t) = A$:

$$N_0\mathrm{e}^{kt} = A \iff \mathrm{e}^{kt} = \frac{A}{N_0}$$

$$\iff kt = \ln\left(\frac{A}{N_0}\right) \iff \boxed{t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{A}{N_0}\right)}.$$

5. Études classiques

1. $f(x) = x\ln x$ sur $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

$f' = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$. Minimum :

$$f(\mathrm{e}^{-1}) = -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2. $g(x) = \ln x/x$:

$$g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Maximum en $x = \mathrm{e}$: $g(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$.

6. Check-list contrôle

Avant de finir une réponse :
- ai-je écrit le domaine de définition ?
- ai-je vérifié que les arguments des ln sont > 0 ?
- ai-je utilisé la croissance de ln dans les inéquations ?
- ai-je évité l'erreur $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$?
- pour une dérivée, ai-je mis u'/u ?
- pour une limite, ai-je repéré une croissance comparée ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 7
Fonction exponentielle

Définition, propriétés algébriques, dérivée et étude de fonctions

1 Définition et valeurs

Définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

On la note

$$\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}.$$

Donc

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x} \qquad \boxed{\mathrm{e}^0 = 1}.$$

Valeurs à connaître

$$\mathrm{e}^0 = 1, \qquad \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2{,}718,$$

$$\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

Si le logarithme est connu :

$$\mathrm{e}^{\ln(a)} = a \ (a > 0), \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x.$$

Domaine et signe

$$\boxed{\mathrm{e}^x > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

Donc e^x n'est jamais nul et jamais négatif.

2 Propriétés algébriques

Formules essentielles

Pour tous réels a, b et tout entier relatif n :

$$\boxed{\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}}$$

$$\boxed{(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}}.$$

Exemples de simplification

$$\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{3x-1}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{5x+2}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{3x+2}$$

$$(\mathrm{e}^{-3x})^2 = \mathrm{e}^{-6x}$$

$$\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^2.$$

Factoriser

Exemples utiles :

$$\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 4),$$

$$3\mathrm{e}^{x+1} + 2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(3\mathrm{e} + 2).$$

On factorise souvent pour étudier un signe.

3 Dérivées

Formules

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x}$$

Si u est dérivable :

$$\boxed{(\mathrm{e}^{u(x)})' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}}.$$

Exemples

$$(\mathrm{e}^{3x-2})' = 3\mathrm{e}^{3x-2}.$$

$$(\mathrm{e}^{-x^2+5x})' = (-2x+5)\mathrm{e}^{-x^2+5x}.$$

$$(x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right)' = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$

Erreur classique

$$(\mathrm{e}^{5x})' \neq \mathrm{e}^{5x}.$$

La bonne dérivée est

$$\boxed{(\mathrm{e}^{5x})' = 5\mathrm{e}^{5x}}.$$

Il ne faut pas oublier la dérivée de l'exposant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

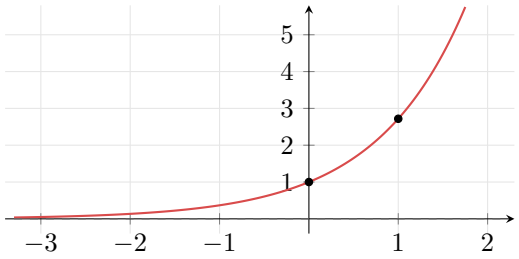
4 Variations, limites, courbe

Tableau de variations

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, la dérivée de e^x est positive. Donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}.$$



À lire sur la courbe

— Domaine : $\mathbb{R}$.
— Image : $]0, +\infty[$.
— Passe par $(0, 1)$ et $(1, \mathrm{e})$.
— Asymptote horizontale : $y = 0$ quand $x \to -\infty$.
— Courbe convexe car $(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x > 0$.

5 Équations et inéquations

Comparer deux exponentielles

Comme exp est strictement croissante :

$$\boxed{\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \iff A = B}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B \iff A < B}.$$

Même principe pour $>$, $\leq$, $\geq$.

Résoudre $\mathrm{e}^A = k$

— Si $k \leq 0$: aucune solution.
— Si $k > 0$:

$$\boxed{\mathrm{e}^A = k \iff A = \ln(k)}.$$

Exemple :

$$\mathrm{e}^{2x-1} = 7 \iff 2x - 1 = \ln 7 \iff x = \frac{1 + \ln 7}{2}.$$

Changement de variable

Pour résoudre

$$\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0,$$

on pose $X = \mathrm{e}^x$ avec $X > 0$. Alors

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \iff (X - 2)(X - 3) = 0.$$

Donc $X = 2$ ou $X = 3$, puis

$$\boxed{x = \ln 2 \text{ ou } x = \ln 3}.$$

6 Étude de fonctions

Plan type

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes.
3. Dérivée.
4. Factorisation de la dérivée.
5. Signe de la dérivée.
6. Tableau de variations.
7. Conclusion : extremum, signe, nombre de solutions.

Exemple guidé : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$

Donc f admet un maximum égal à $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = 1$.

Exemple : $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2+2x}$

$$g'(x) = (-2x + 2)\mathrm{e}^{-x^2+2x} = 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x^2+2x}.$$

Le facteur exponentiel est positif, donc g est croissante sur $]-\infty, 1]$ puis décroissante sur $[1, +\infty[$.

$$g(1) = \mathrm{e}.$$

7 Applications rapides

Modèle exponentiel

Une quantité peut s'écrire

$$\boxed{Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{at}}.$$

— Q_0 : valeur initiale.
— $a > 0$: croissance.
— $a < 0$: décroissance.

Trouver une durée

Si $Q(t) = 200\mathrm{e}^{0{,}04t}$ et si on cherche $Q(t) = 300$:

$$200\mathrm{e}^{0{,}04t} = 300 \iff \mathrm{e}^{0{,}04t} = 1{,}5$$

$$0{,}04t = \ln(1{,}5) \iff \boxed{t = \frac{\ln(1{,}5)}{0{,}04}}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Pièges à éviter

— $\mathrm{e}^{a+b} \neq \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.
— e^x n'est jamais nul.
— Ne pas oublier $u'(x)$ dans $(\mathrm{e}^u)'$.

— Après $X = \mathrm{e}^x$, imposer $X > 0$.
— Pour un signe, un facteur $\mathrm{e}^{u(x)}$ est toujours positif.

Mini-bilan

$$\boxed{\mathrm{e}^x > 0} \quad \boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x} \quad \boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b} \quad \boxed{\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \iff A = B}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 8
Fonctions trigonométriques

Dérivées, variations et représentations graphiques de sin et cos

1. Définitions

Cercle trigonométrique

À un réel x, on associe un point M du cercle de centre O et de rayon 1.

$\cos(x) =$ abscisse de M, $\quad \sin(x) =$ ordonnée de M.

Les angles sont exprimés en radians.

Bornes et identité

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Périodicité et symétries

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

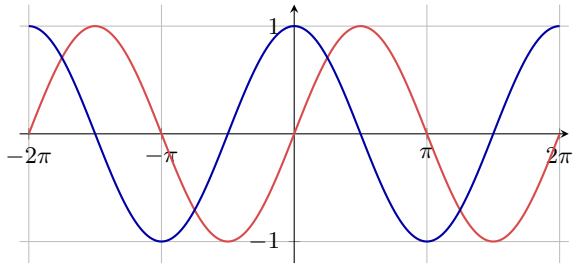
$\cos(-x) = \cos x$ (cos paire), $\quad \sin(-x) = -\sin x$ (sin impaire).

2. Courbes

Points clés

sin : $0, 1, 0, -1, 0$ pour $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

cos : $1, 0, -1, 0, 1$ pour les mêmes abscisses.



Rouge : $\sin x$; bleu : $\cos x$.

Méthode de lecture

Une équation trigonométrique se lit avec une droite horizontale $y = a$. Sur $\mathbb{R}$, on répète les solutions avec $+2k\pi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

3. Dérivées

Formules indispensables

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

Si u est dérivable :

$$(\sin u)' = u' \cos u, \qquad (\cos u)' = -u' \sin u.$$

Exemples rapides

$$(\sin(3x))' = 3\cos(3x)$$
$$(\cos(2x-1))' = -2\sin(2x-1)$$
$$(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Piège majeur

La dérivée de cos commence par un signe moins :

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

4. Variations

Variations de $\sin$ sur $[-\pi, \pi]$

Comme $(\sin x)' = \cos x$:
— décroissante sur $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$;
— croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
— décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Valeurs : $0, -1, 1, 0$ aux points $-\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Variations de $\cos$ sur $[-\pi, \pi]$

Comme $(\cos x)' = -\sin x$:
— croissante sur $[-\pi, 0]$;
— décroissante sur $[0, \pi]$.
Valeurs : $\cos(-\pi) = -1$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$.

Méthode : étudier une fonction trigonométrique

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ sur l'intervalle.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ avec le cercle ou les valeurs remarquables.
4. Faire le tableau de variations.
5. Lire maximum, minimum ou nombre de solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

5. Équations

$\cos x = a$

Il faut $a \in [-1, 1]$. On pose $\alpha = \arccos(a) \in [0, \pi]$.

$$\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi.$$

$\sin x = a$

Il faut $a \in [-1, 1]$. On pose $\alpha = \arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

Exemples

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ sur } [-\pi, \pi] \iff x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sur } [0, 2\pi] \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

6. Inéquations

$\cos x \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$

Si $a \in [-1, 1]$, poser $\alpha = \arccos(a)$.

$$\boxed{\cos x \leq a \iff x \in [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi].}$$

Pour $\cos x \geq a$:

$$\boxed{x \in [-\alpha, \alpha].}$$

7. Exemples d'étude

$f(x) = 2\cos x + 1$ sur $[-\pi, \pi]$

$$f'(x) = -2\sin x.$$

Sur $[-\pi, 0]$, $\sin x \leq 0$, donc $f'(x) \geq 0$: f croît. Sur $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, donc $f'(x) \leq 0$: f décroît.

$$f(-\pi) = -1, \quad f(0) = 3, \quad f(\pi) = -1.$$

Maximum : 3, atteint en 0.

Inéquations : exemples

$$\cos x \leq \frac{1}{2} \text{ sur } [-\pi, \pi] \iff x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

$$\cos x > 0 \text{ sur } [-\pi, \pi] \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Checklist avant contrôle

Je sais :
- dériver $\sin u$ et $\cos u$;
- utiliser le signe de sin et de cos ;
- lire une solution sur le cercle ;
- ajouter $2k\pi$ sur $\mathbb{R}$;
- faire une étude de variations complète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 9
Primitives et équations différentielles
Terminale spécialité mathématiques

1. Primitives : l'idée

Définition

Une fonction F est une **primitive** de f sur un intervalle I lorsque :

$$\boxed{F' = f \text{ sur } I.}$$

Chercher une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivation.

Toutes les primitives

Si F est une primitive de f sur I, alors toutes les primitives sont :

$$\boxed{F(x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).}$$

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Vérifier une primitive

Pour vérifier que F est une primitive de f : calculer F', simplifier, puis comparer avec f.

2. Tableau des primitives usuelles

À connaître

$f(x)$	Une primitive $F(x)$
a	ax
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$ sur $]0, +\infty[$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

Linéarité

Si $F' = f$ et $G' = g$, alors :

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g.$$

Donc on primitive terme à terme.

Exemple

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

$$\boxed{F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C.}$$

3. Primitives avec une composée

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Formes à reconnaître

Soit u dérivable.

Fonction	Primitive
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'u^n$, $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$

Réflexe

Identifier u, calculer u', puis vérifier si le facteur u' est présent. S'il manque seulement une constante, on ajuste.

Exemples

$$\int 6x\mathrm{e}^{3x^2+1}\,dx = \boxed{\mathrm{e}^{3x^2+1}+C}$$

$$\int 10x(5x^2-1)^3\,dx = \boxed{\frac{(5x^2-1)^4}{4}+C}$$

$$\int \mathrm{e}^{4x-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x-1}+C}$$

4. Équations différentielles

Vocabulaire

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui contient sa dérivée y'.
Une fonction est solution si elle vérifie l'équation pour tout x de l'intervalle.

Vérifier une solution

Pour vérifier que y est solution de $y' = ay + b$:
1. calculer y' ;
2. calculer $ay + b$;
3. vérifier que les deux expressions sont égales.

Exemple

$y(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ est solution de $y' = 2y$ car :

$$y' = 6\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad 2y = 6\mathrm{e}^{2x}.$$

5. Résoudre $y' = ay$

Formule à connaître

Les solutions de

$$\boxed{y' = ay}$$

sont :

$$\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{ax} \quad (C \in \mathbb{R}).}$$

Avec condition initiale

Si $y(x_0) = y_0$, alors :

$$\boxed{y(x) = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)}.}$$

Exemple

Résoudre $y' = -3y$ et $y(2) = 5$.

$$\boxed{y(x) = 5\mathrm{e}^{-3(x-2)}.}$$

6. Résoudre $y' = ay + b$

Cas $a \neq 0$

L'équilibre est :

$$\boxed{\ell = -\frac{b}{a}.}$$

Les solutions de

$$\boxed{y' = ay + b}$$

sont :

$$\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}.}$$

Avec condition initiale

Si $y(x_0) = y_0$ et $a \neq 0$:

$$\boxed{y(x) = -\frac{b}{a} + \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{a(x-x_0)}.}$$

Cas $a = 0$

Si $a = 0$, alors $y' = ay + b$ devient $y' = b$:

$$\boxed{y(x) = bx + C.}$$

7. Méthode type bac

Résoudre $y' = ay + b$

1. Identifier a et b.
2. Calculer l'équilibre $\ell = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$.
3. Écrire $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \ell$.
4. Utiliser la condition initiale pour trouver C.
5. Conclure avec une formule claire.

Exemple complet

Résoudre $y' = -2y + 8$, $y(0) = 1$.

$$\ell = -\frac{8}{-2} = 4.$$

Donc $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 4$. Avec $y(0) = 1$:

$$C + 4 = 1 \Rightarrow C = -3.$$

$$\boxed{y(x) = 4 - 3\mathrm{e}^{-2x}.}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

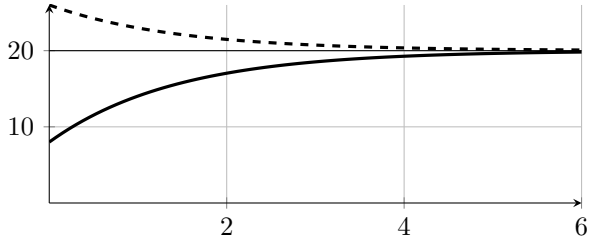
8. Allure des solutions

Équilibre

Pour $y' = ay + b$, les solutions s'écrivent :

$$y(x) = \ell + C\mathrm{e}^{ax}, \quad \ell = -\frac{b}{a}.$$

Si $a < 0$, alors $\mathrm{e}^{ax} \to 0$ quand $x \to +\infty$: les solutions tendent vers l'équilibre ℓ.



9. Méthode d'Euler

Approximation

Pour $y' = f(x, y)$, avec pas h :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).}$$

Pour $y' = ay + b$:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h(ay_n + b).}$$

Exemple

$y' = -y + 3$, $y(0) = 1$, $h = 0{,}5$:

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}5(-y_n + 3).$$

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = 2{,}5.$$

10. Erreurs à éviter

Checklist

- Oublier $+C$ dans les primitives.
- Écrire une primitive de e^{ax+b} sans diviser par a.
- Confondre $-\frac{b}{a}$ et $\frac{b}{a}$.
- Utiliser $\ln x$ sans vérifier que $x > 0$.
- Ne pas utiliser la condition initiale pour trouver C.
- Dire qu'une fonction est solution sans avoir calculé y'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 10
Calcul intégral

Intégrale d'une fonction continue, propriétés, intégration par parties et applications

1 Définition, calcul et propriétés

Intégrale : sens

Si f est continue sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre.

Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, il représente l'aire sous la courbe :

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Si f est négative, l'intégrale compte une aire algébrique négative.

Notation

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La variable d'intégration est muette. Une intégrale de a à b est un nombre.

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b.}$$

Méthode de calcul

1. Trouver une primitive F de f.
2. Calculer $F(b) - F(a)$.
3. Simplifier.

Primitive définie par une intégrale

Si f est continue et si

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

alors

$$\boxed{G'(x) = f(x)} \qquad \text{et} \qquad G(a) = 0.$$

Exemples rapides

$$\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = [x^2 + x]_1^3 = 10.$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1).$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Bornes et Chasles

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0} \qquad \boxed{\int_b^a f = -\int_a^b f}$$

$$\boxed{\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.}$$

Linéarité

Pour tous réels α, β :

$$\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.}$$

Signe et comparaison

Pour $a \leq b$:

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0, \qquad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Si $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

2 Valeur moyenne, aires et intégration par parties

Valeur moyenne

Si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$, sa valeur moyenne est :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Elle représente la hauteur constante qui donnerait la même aire algébrique sur $[a,b]$.

Exemple

Pour $f(x)=x^2$ sur $[0,3]$:

$$\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.$$

Aire sous une courbe

Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Si $f \leq 0$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Si f change de signe, on découpe l'intervalle.

Aire entre deux courbes

Si $f \geq g$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.}$$

Méthode : courbe du haut moins courbe du bas.

Exemple d'aire

Entre $f(x)=2x+1$ et $g(x)=x^2$ sur $[0,1]$:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (2x+1-x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2+x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Intégration par parties

Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Version équivalente :

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Choisir u et v'

On choisit souvent :
— u = fonction qui se simplifie en dérivant : x, x^2, $\ln x$;
— v' = fonction facile à primitiver : e^x, $\sin x$, $\cos x$, 1.

Exemple 1

$$I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

On prend $u=x$, $v'=\mathrm{e}^x$, donc $u'=1$, $v=\mathrm{e}^x$.

$$I = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

Exemple 2 : primitive de $\ln x$

Avec $u=\ln x$ et $v'=1$:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

À vérifier : $(x\ln x - x)' = \ln x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

3 Table, méthodes types et checklist

Erreurs fréquentes

— oublier $[uv]_a^b$ en intégration par parties ;
— oublier le signe $-$;
— confondre une aire positive avec une intégrale négative ;
— oublier que la comparaison suppose $a \leq b$.

Mini-table de primitives utiles

$f(x)$	Une primitive $F(x)$
x^n $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$ sur $]0, +\infty[$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}$, $a \neq 0$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$ si $u > 0$

Calcul direct

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} + 2x\right) \mathrm{d}x = [3\ln x + x^2]_1^2 = 3\ln 2 + 3.$$

Utiliser Chasles

Si $\int_0^3 f = 7$ et $\int_0^1 f = 2$, alors :

$$\int_1^3 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f = 5.$$

Encadrer une intégrale

Si sur $[0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 2$, alors :

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2.$$

Plus généralement : longueur de l'intervalle $\times$ bornes de f.

Aire avec changement de signe

Pour l'aire entre $f(x) = x - 1$ et l'axe sur $[0, 3]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc :

$$\mathcal{A} = -\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Checklist bac

Avant de conclure, vérifier :
— la fonction est continue sur l'intervalle ;
— la primitive est correcte ;
— les bornes sont dans le bon ordre ;
— l'aire est positive ;
— les unités d'aire sont indiquées si nécessaire ;
— l'intégration par parties a le bon signe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 1 — Géométrie dans l'espace : vecteurs

Chapitre 11 — cours essentiel

Vecteur de l'espace

Un vecteur représente un **déplacement**. Il a une direction, un sens et une longueur. $\overrightarrow{AB}$ va de A vers B.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}} \quad \text{(Chasles)}$$

Multiplier par λ change la longueur ; si $\lambda < 0$, le sens est inversé.

Coordonnées

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$$

Mémo : arrivée moins départ.

Opérations et norme

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}, \qquad \lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Dans un repère orthonormé :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\vec{u} = \lambda\vec{v}.}$$

Avec les coordonnées, il faut trouver le **même coefficient** pour les trois coordonnées.

Alignement

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}}$$

Méthode : calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis vérifier si l'un est un multiple de l'autre.

Coplanarité

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.}$$

Pour quatre points A, B, C, D, on teste :

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.}$$

Base de l'espace

Trois vecteurs forment une base de l'espace lorsqu'ils ne sont **pas coplanaires**. Dans une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\boxed{\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}}$$

et cette décomposition est unique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 2 — Méthodes types

1. Calculer un vecteur

$A(1;-2;3)$ et $B(4;0;-1)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\0-(-2)\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}.$$

2. Tester une colinéarité

$\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}=3\vec{v}.$$

Ils sont colinéaires. Si un seul coefficient ne convient pas sur les trois coordonnées, ils ne sont pas colinéaires.

3. Prouver un alignement

$A(1;2;0)$, $B(3;5;4)$, $C(5;8;8)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}=2\overrightarrow{AB}.$$

Donc A, B, C sont alignés.

4. Tester une coplanarité

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$.

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\2\alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

On veut $\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$, donc $\alpha=3$, $\beta=-2$, et $2\alpha-\beta=8$. Les vecteurs sont coplanaires.

5. Tester quatre points coplanaires

Pour savoir si $D\in(ABC)$:

1. calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;
2. poser $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$;
3. résoudre le système obtenu.

Si le système est compatible, les quatre points sont coplanaires.

6. Décomposer dans une base

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$.

$$x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\begin{pmatrix}x+y\\y+z\\z\end{pmatrix}.$$

On résout : $x+y=5$, $y+z=4$, $z=2$, donc $z=2$, $y=2$, $x=3$.

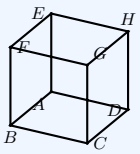
$$\boxed{\vec{a}=3\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}.}$$

Repère dans un cube

Dans le cube $ABCDEFGH$, avec $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

$$A(0;0;0),\ B(1;0;0),\ D(0;1;0),\ E(0;0;1),$$

$$C(1;1;0),\ F(1;0;1),\ H(0;1;1),\ G(1;1;1).$$



mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 3 — Exercices flash corrigés

1. Coordonnées

$A(2;-1;4)$, $B(-3;5;1)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\6\\-3\end{pmatrix}.$$

2. Colinéarité

$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}=-2\vec{v}.$$

Ils sont colinéaires.

3. Alignement

$A(1;0;2)$, $B(3;1;6)$, $C(7;3;14)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\12\end{pmatrix}=3\overrightarrow{AB}.$$

Donc les points sont alignés.

4. Non-alignement

$A(0;0;0)$, $B(1;2;1)$, $C(2;4;3)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Les deux premières coordonnées donnent 2, mais $3\neq 2\times 1$. Non alignés.

5. Coplanarité

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\2\beta\\\alpha+\beta\end{pmatrix}.$$

On veut $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$. Donc $\alpha=3$, $\beta=2$, et $\alpha+\beta=5$. Coplanaires.

6. Base

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$. Les deux premières coordonnées donnent $\alpha=3$, $\beta=2$. La troisième donnerait 5, pas 4. Donc les vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base.

Pièges à éviter

- Oublier la troisième coordonnée.
- Confondre colinéarité et coplanarité.
- Pour quatre points, ne pas prendre des vecteurs au hasard : utiliser $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
- Dire « base » sans vérifier que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Checklist contrôle

Je dois savoir : calculer $\overrightarrow{AB}$; tester une colinéarité ; prouver un alignement ; tester $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$; reconnaître une base ; résoudre les systèmes avec les coordonnées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 1 — Droites et plans dans l'espace

Chapitre 12 — représentations paramétriques

Droite paramétrique

Une droite est définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \\ z &= z_A + tc \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

Le point vient des constantes ; le vecteur directeur vient des coefficients de t.

Droite passant par deux points

Pour la droite (AB) :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$$

Puis on écrit :

$$M = A + t\overrightarrow{AB}.$$

Exemple : $A(1;2;0)$, $B(3;1;4)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= 4t \end{cases}$$

Tester $M \in d$

On remplace x, y, z par les coordonnées de M et on cherche si un **même** paramètre t vérifie les trois lignes.

même $t \Rightarrow M \in d$, pas le même $t \Rightarrow M \notin d$.

Plan paramétrique

Un plan est défini par un point A et deux vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ non colinéaires :

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_A + sa + ta' \\ y &= y_A + sb + tb' \\ z &= z_A + sc + tc' \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2}$$

avec $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Plan passant par trois points

Si A, B, C ne sont pas alignés, alors :

$$\boxed{M = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}}$$

Les vecteurs directeurs du plan (ABC) sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

À ne pas confondre

Dans l'espace :

- une droite paramétrique utilise **un** paramètre ;
- un plan paramétrique utilise **deux** paramètres ;
- une seule équation $ax + by + cz + d = 0$ décrit un **plan**, pas une droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 2 — Équations cartésiennes de plans

vecteur normal, appartenance, méthodes

Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé, un plan a une équation :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

avec a, b, c non tous nuls. Un vecteur normal est :

$$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Exemple : $2x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Tester $M \in \mathcal{P}$

Pour savoir si $M(x_M ; y_M ; z_M)$ est dans $\mathcal{P} : ax+by+cz+d = 0$, on calcule :

$$ax_M + by_M + cz_M + d.$$

Si le résultat vaut 0, alors $M \in \mathcal{P}$.

Plan avec point + vecteur normal

On connaît $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1. Écrire $ax + by + cz + d = 0$.
2. Remplacer par les coordonnées de A.
3. Trouver d.

Exemple : $A(1;2;0)$, $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$3x - y + 4z + d = 0, \quad 3 - 2 + d = 0, \quad d = -1.$$

Donc $3x - y + 4z - 1 = 0$.

Plan passant par trois points

Pour (ABC) :

1. calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
2. chercher $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 ;$$

3. écrire $ax + by + cz + d = 0$;
4. utiliser A, B ou C pour trouver d.

Produit scalaire dans l'espace

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire vaut 0.

Équations équivalentes

Multiplier toute l'équation par un réel non nul ne change pas le plan.

$$x - 2y + z + 4 = 0$$

et

$$-2x + 4y - 2z - 8 = 0$$

décrivent le même plan.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiche 3 — Positions relatives

droite-droite, droite-plan, plan-plan

Deux droites

Cas possibles : confondues, strictement parallèles, sécantes, non coplanaires.
Méthode :

1. comparer les vecteurs directeurs ;
2. s'ils sont colinéaires : droites parallèles ou confondues ;
3. sinon, résoudre le système d'intersection avec deux paramètres t et s.

solution $\Rightarrow$ sécantes, pas de solution $\Rightarrow$ non coplanaires.

Droite et plan

Droite : $x = x_A + ta$, $y = y_A + tb$, $z = z_A + tc$. Plan : $ax + by + cz + d = 0$.
On substitue la droite dans le plan.

— Une valeur de t : droite sécante au plan.
— Égalité toujours vraie : droite incluse dans le plan.
— Contradiction : droite strictement parallèle au plan.

Raccourci droite-plan

Si $\vec{u}$ dirige la droite et $\vec{n}$ est normal au plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow d \text{ sécante à } \mathcal{P}.$$

Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la droite est parallèle au plan ou incluse : tester un point de la droite.

Deux plans

Plans :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0, \quad \mathcal{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Vecteurs normaux :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{n'} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

— Normales non colinéaires : plans sécants selon une droite.
— Normales colinéaires : plans parallèles ou confondus.

Intersection de deux plans

Pour trouver la droite d'intersection :

1. résoudre le système des deux équations ;
2. choisir une variable comme paramètre, souvent $z = t$;
3. exprimer les deux autres variables en fonction de t ;
4. écrire une représentation paramétrique.

Checklist express

— Droite : point + vecteur directeur.
— Plan cartésien : coefficients de x, y, z = vecteur normal.
— Pour appartenir : remplacer les coordonnées.
— Pour intersecter : résoudre un système.
— Pour plan-plan : comparer les normales.
— Pour droite-plan : substituer la droite dans le plan.

Mini-exemple

$d : x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$ et $\mathcal{P} : x + y + z - 8 = 0$.

$$(1 + t) + (2 - t) + (3 + 2t) - 8 = 0$$

$$-2 + 2t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Intersection : $M(2; 1; 5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions - Chapitre 13

Probabilités conditionnelles et indépendance

1. Vocabulaire

Événements

— $\overline{A}$: contraire de A.
— $A \cap B$: A et B.
— $A \cup B$: A ou B.
— Incompatibles : $A \cap B = \varnothing$.
— Partition : cas incompatibles qui couvrent tout Ω.

$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2. Probabilité conditionnelle

Définition

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$$

Ordre important

$\mathbb{P}_A(B)$ signifie : probabilité de B sachant A. En général :

$$\mathbb{P}_A(B) \neq \mathbb{P}_B(A).$$

Méthode

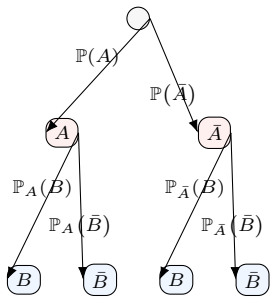
Pour calculer une probabilité conditionnelle :
1. repérer ce qui suit “sachant que” ;
2. le mettre au dénominateur ;
3. utiliser $\dfrac{\text{intersection}}{\text{condition}}$.

3. Arbre pondéré

Règles

1. La somme des branches issues d’un même noeud vaut 1.
2. On multiplie le long d’un chemin.
3. On additionne plusieurs chemins qui mènent au même événement.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$



4. Probabilités totales

Avec A et $\overline{A}$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

Avec une partition

Si $A_1, \ldots, A_n$ forment une partition :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

5. Bayes

Inverser un conditionnement

Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Avec deux cas A et $\overline{A}$:

$$\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}}$$

Méthode Bayes

1. Calculer le numérateur : intersection.
2. Calculer le dénominateur avec les probabilités totales.
3. Diviser et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

6. Indépendance

Définition

A et B sont indépendants si savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B :

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)}$$

Critère à utiliser en calcul :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}$$

Piège

Indépendants $\neq$ incompatibles.
— Incompatibles : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
— Indépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.
Si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, deux événements incompatibles ne sont pas indépendants.

Contraires

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

7. Succession indépendante

Produit

Pour des étapes indépendantes :

$$\boxed{\mathbb{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(x_1)\,\mathbb{P}(x_2) \cdots \mathbb{P}(x_n)}$$

Exemple : deux lancers de dé.

$$\mathbb{P}(6 \text{ puis pair}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{12}.$$

8. Exemples rapides

Exemple 1 - arbre

Une machine A produit 60% des pièces, la machine B 40%.

$$\mathbb{P}_A(D) = 0{,}02, \qquad \mathbb{P}_B(D) = 0{,}05.$$

Alors :

$$\mathbb{P}(D) = 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}032.$$

Donc $3{,}2\%$ des pièces sont défectueuses.

Exemple 2 - Bayes

Dans l'exemple précédent :

$$\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0{,}60 \times 0{,}02}{0{,}032} = 0{,}375.$$

Sachant qu'une pièce est défectueuse, elle vient de A avec probabilité $37{,}5\%$.

Exemple 3 - indépendance

Si :

$$\mathbb{P}(A) = 0{,}3, \quad \mathbb{P}(B) = 0{,}5, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}15,$$

alors :

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15.$$

Donc A et B sont indépendants.

9. Checklist exercice

Choisir la bonne formule

Sachant que	probabilité conditionnelle
Arbre	multiplier puis additionner
$\mathbb{P}(B)$ **finale**	probabilités totales
Inverser	Bayes
Indépendance ?	comparer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Erreurs fréquentes

— Confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.
— Additionner des branches au lieu de multiplier un chemin.
— Oublier un chemin dans les probabilités totales.
— Dire que deux événements incompatibles sont indépendants.

10. À retenir en une phrase

Idée centrale

Une probabilité conditionnelle change l'univers : on ne travaille plus avec tous les cas, mais seulement avec ceux où l'information donnée est vraie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 14

Variables aléatoires (lois)

Loi binomiale, sommes, espérance et variance

1. Variable aléatoire

Définition

Une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Sa loi donne toutes les probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$.

Tableau de loi

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

À vérifier : $p_i \geq 0$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

2. Espérance, variance

Formules

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i)}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$$

Interprétation. $\mathbb{E}(X)$ est une moyenne théorique. $\sigma(X)$ mesure la dispersion autour de cette moyenne.

Méthode variance

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ avec les carrés des valeurs.
3. Faire $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

3. Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Deux issues : succès de probabilité p, échec de probabilité $1 - p$.

Loi de Bernoulli

Si $X = 1$ en cas de succès et $X = 0$ sinon, alors :

$$X \sim \mathcal{B}(1, p)$$

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

4. Loi binomiale

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Schéma de Bernoulli

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Si X compte le nombre de succès :

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p)}$$

Probabilité exacte

Pour $0 \leq k \leq n$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Reconnaître $\mathcal{B}(n,p)$

Vérifier :
— nombre d'épreuves fixé n ;
— deux issues : succès / échec ;
— épreuves indépendantes ;
— même probabilité de succès p ;
— X compte les succès.

5. Probabilités cumulées

Traductions

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X=0) + \cdots + \mathbb{P}(X=k)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a-1)}$$

À ne pas confondre

— au moins 5 : $X \geq 5$;
— plus de 5 : $X \geq 6$;
— moins de 5 : $X \leq 4$.

6. Sommes de variables

Somme

Si X et Y sont définies sur le même univers :

$$(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

On essaie souvent d'écrire une variable compliquée comme somme de variables simples :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Linéarité de l'espérance

$$\boxed{\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b}$$

Vrai même sans indépendance.

Variance

$$\boxed{\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)}$$

Si X et Y sont indépendantes :

$$\boxed{\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

7. Formules binomiales

À connaître

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p)}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

np = nombre moyen de succès.
$np(1-p)$ = dispersion du nombre de succès.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

8. Échantillon

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ et $\mathbb{V}(X_i) = V$:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Somme et moyenne

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mu, \qquad \mathbb{V}(S_n) = nV$$

$$\mathbb{E}(M_n) = \mu, \qquad \mathbb{V}(M_n) = \frac{V}{n}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Méthodes rapides et exemples types

Méthode A — calculer $\mathbb{P}(X = k)$

Loi binomiale

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:
1. Identifier n, p et k.
2. Écrire $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
3. Calculer et arrondir.

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(8, 0{,}25)$. Alors :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{8}{3} (0{,}25)^3 (0{,}75)^5.$$

$$\mathbb{P}(X = 3) \approx 0{,}208.$$

Méthode B — au moins

Passer par le complémentaire

Pour calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$:

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1)\,.$$

Exemple

$X \sim \mathcal{B}(20, 0{,}1)$. La probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (0{,}9)^{20}.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \approx 0{,}878.$$

Méthode C — espérance par linéarité

Somme

Si $T = X + Y + Z$, alors :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z).$$

Pas besoin d'indépendance.

Exemple

Trois gains ont pour espérances 2, -1 et 4. Le gain total T vérifie :

$$\mathbb{E}(T) = 2 + (-1) + 4 = 5.$$

Méthode D — variance d'une somme

Indépendance obligatoire

Si X, Y, Z sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X + Y + Z) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(Z).$$

Attention

Sans indépendance, cette formule n'est pas utilisable directement.

Exemple complet

Défauts de fabrication

Une pièce est défectueuse avec probabilité $0{,}03$. On contrôle 50 pièces indépendantes. X = nombre de pièces défectueuses.

Loi :

$$X \sim \mathcal{B}(50, 0{,}03).$$

Aucune pièce défectueuse :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{50}{0} (0{,}03)^0 (0{,}97)^{50} = 0{,}97^{50}.$$

Au moins une pièce défectueuse :

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - 0{,}97^{50} \approx 0{,}782.$$

Moyenne :

$$\mathbb{E}(X) = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5.$$

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = 50 \times 0{,}03 \times 0{,}97 = 1{,}455.$$

Check-list avant contrôle

Je sais :
- lire une loi dans un tableau ;
- vérifier que la somme des probabilités vaut 1 ;
- calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{V}(X)$;
- reconnaître une loi binomiale ;
- calculer $\mathbb{P}(X = k)$ avec la formule ;
- traduire "au moins", "au plus", "entre" ;
- utiliser $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$;
- utiliser l'additivité des variances seulement en cas d'indépendance ;
- appliquer $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.

Erreurs à éviter

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Classiques

— Oublier le coefficient $\binom{n}{k}$.
— Confondre $\mathbb{P}(X \geq k)$ et $\mathbb{P}(X \leq k)$.
— Utiliser une loi binomiale sans indépendance.
— Écrire $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ sans vérifier l'indépendance.
— Confondre variance et écart type : $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Exercices flash corrigés

Flash 1

Énoncé

x_i	-1	2	4
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}3$

Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = -1\times 0{,}2 + 2\times 0{,}5 + 4\times 0{,}3 = 2.$$

Flash 2

Énoncé

$X \sim \mathcal{B}(12, 0{,}4)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = 12\times 0{,}4 = 4{,}8.$$
$$\mathbb{V}(X) = 12\times 0{,}4\times 0{,}6 = 2{,}88.$$

Flash 3

Énoncé

$X \sim \mathcal{B}(10, 0{,}2)$. Écrire $\mathbb{P}(X=2)$.

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{10}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^8.$$

Flash 4

Énoncé

$X \sim \mathcal{B}(15, 0{,}7)$. Exprimer $\mathbb{P}(X \geq 12)$ à l'aide d'une probabilité cumulée.

$$\mathbb{P}(X \geq 12) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 11)\,.$$

Flash 5

Énoncé

$\mathbb{E}(X)=3$, $\mathbb{E}(Y)=8$. Calculer $\mathbb{E}(2X+Y-5)$.

$$\mathbb{E}(2X+Y-5) = 2\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)-5 = 6+8-5 = 9.$$

Flash 6

Énoncé

X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(X)=4$, $\mathbb{V}(Y)=9$. Calculer $\mathbb{V}(X+Y)$ et $\mathbb{V}(3X-1)$.

$$\mathbb{V}(X+Y) = 4+9 = 13.$$
$$\mathbb{V}(3X-1) = 3^2\mathbb{V}(X) = 36.$$

Flash 7

Énoncé

On répète 40 épreuves indépendantes, succès de probabilité $0{,}15$. X compte les succès. Donner la loi et le nombre moyen de succès.

$$X \sim \mathcal{B}(40, 0{,}15), \qquad \mathbb{E}(X) = 40\times 0{,}15 = 6.$$

Flash 8

Énoncé

$X_1, \ldots, X_{25}$ sont indépendantes et de même loi, $\mathbb{E}(X_i)=10$, $\mathbb{V}(X_i)=16$. On pose $M = \frac{X_1+\cdots+X_{25}}{25}$. Calculer $\mathbb{E}(M)$ et $\mathbb{V}(M)$.

$$\mathbb{E}(M) = 10, \qquad \mathbb{V}(M) = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

Mini-formulaire final

À mémoriser

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i p_i$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$X \sim \mathcal{B}(n,p) : \quad \mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$
$$X, Y \text{ indépendantes} : \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Fiches de révisions — Chapitre 15 : Concentration et loi des grands nombres

Bienaymé-Tchebychev, concentration, loi des grands nombres

1. Idée du chapitre

Concentration

Une variable aléatoire est concentrée autour de son espérance lorsque les grands écarts à cette espérance sont peu probables.

$$\text{Grand écart : } |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \delta.$$

$\delta > 0$ est l'écart toléré.

Variance et écart type

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \qquad \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

La variance mesure la dispersion autour de l'espérance.

Traduction d'un écart

$$|X - \mu| \geqslant \delta$$

signifie : X est en dehors de l'intervalle $]\mu - \delta ; \mu + \delta[$.

$$|X - \mu| < \delta$$

signifie : X est dans $]\mu - \delta ; \mu + \delta[$.

2. Bienaymé-Tchebychev

Inégalité

Si X a pour espérance μ et pour variance V, alors pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

Forme complémentaire :

$$\boxed{\mathbb{P}(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \frac{V}{\delta^2}}$$

Méthode directe

Pour majorer $\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant \delta)$:

1. repérer $\mu = \mathbb{E}(X)$;
2. repérer $V = \mathbb{V}(X)$;
3. repérer δ ;
4. calculer V/δ^2.

Exemple. Si $\mu = 50$, $V = 16$ et $\delta = 10$:

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geqslant 10) \leqslant \frac{16}{10^2} = 0{,}16.$$

Donc $\mathbb{P}(|X - 50| < 10) \geqslant 0{,}84$.

Trouver un écart

Pour garantir $\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \alpha$, il suffit que :

$$\frac{V}{\delta^2} \leqslant \alpha.$$

Donc :

$$\boxed{\delta \geqslant \sqrt{\frac{V}{\alpha}}}$$

3. Moyenne d'un échantillon

Échantillon

$X_1, \ldots, X_n$ est un échantillon si les variables sont indépendantes et de même loi.

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \qquad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Espérance et variance de la moyenne

Si chaque X_i a pour espérance μ et variance V :

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) = \mu}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(M_n) = \frac{V}{n}}$$

Plus n est grand, plus la moyenne est stable.

Attention

On divise la variance par n, pas par $\sqrt{n}$. L'écart type, lui, vaut :

$$\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{V}{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Concentration — Loi des grands nombres

4. Inégalité de concentration

Formule

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance V. Alors, pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}}$$

Forme complémentaire :

$$\boxed{\mathbb{P}(|M_n - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \frac{V}{n\delta^2}}$$

Méthode

Pour appliquer la formule :
1. identifier μ ;
2. identifier V ;
3. identifier n ;
4. identifier δ ;
5. calculer $\dfrac{V}{n\delta^2}$.

Exemple. $\mu = 100$, $V = 4$, $n = 64$, $\delta = 0{,}5$.

$$\mathbb{P}(|M_{64} - 100| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{4}{64 \times 0{,}5^2} = 0{,}25.$$

Taille d'échantillon

Pour garantir :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \alpha,$$

il suffit que :

$$\frac{V}{n\delta^2} \leqslant \alpha.$$

Donc :

$$\boxed{n \geqslant \frac{V}{\alpha\delta^2}}$$

On prend toujours l'entier supérieur.

Exemple. $V = 9$, $\delta = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}05$.

$$n \geqslant \frac{9}{0{,}05 \times 0{,}3^2} = 2000.$$

Un échantillon de taille 2000 suffit.

5. Loi des grands nombres

Énoncé

Pour tout $\delta > 0$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \delta) = 0}$$

Équivalent :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \delta) = 1}$$

Interprétation

Quand le nombre d'observations augmente, la moyenne observée M_n se rapproche de l'espérance μ avec une probabilité de plus en plus grande.

À ne pas dire

La moyenne n'est pas « forcément égale » à μ. La loi des grands nombres dit seulement que les grands écarts deviennent très improbables.

6. Fréquences et proportions

Fréquence de succès

Pour des essais de Bernoulli de paramètre p :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{succès} \\ 0 & \text{échec} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = p, \qquad \mathbb{V}(X_i) = p(1-p).$$

La fréquence de succès est :

$$F_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Concentration d'une fréquence

$$\boxed{\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}}$$

Comme $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}}$$

Proportion inconnue

Pour garantir $\mathbb{P}(|F_n - p| \geqslant \delta) \leqslant \alpha$ sans connaître p :

$$\frac{1}{4n\delta^2} \leqslant \alpha$$

Donc :

$$\boxed{n \geqslant \frac{1}{4\alpha\delta^2}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)

Méthodes types — Chapitre 15

7. Quelle formule choisir ?

Une seule variable X

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$$

À utiliser quand on parle directement de X.

Moyenne d'un échantillon

$$\mathbb{P}(|M_n-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$$

À utiliser quand on parle d'une moyenne sur n observations.

Fréquence

$$\mathbb{P}(|F_n-p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

ou, sans connaître p :

$$\mathbb{P}(|F_n-p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

8. Exercices types corrigés

Exercice 1. $\mathbb{E}(X)=80$, $\mathbb{V}(X)=36$. Majorer $\mathbb{P}(|X-80| \geqslant 12)$.

$$\mathbb{P}(|X-80| \geqslant 12) \leqslant \frac{36}{12^2} = 0{,}25.$$

Exercice 2. Même variable, échantillon de taille 100. Majorer $\mathbb{P}(|M_{100}-80| \geqslant 3)$.

$$\mathbb{P}(|M_{100}-80| \geqslant 3) \leqslant \frac{36}{100 \times 3^2} = 0{,}04.$$

Exercice 3. Trouver n pour que $\mathbb{P}(|M_n-80| \geqslant 2) \leqslant 0{,}01$.

$$\frac{36}{n \times 2^2} \leqslant 0{,}01$$

$$n \geqslant \frac{36}{0{,}01 \times 4} = 900.$$

Exercice 4. Estimer une proportion inconnue avec une erreur $\delta = 0{,}02$ et un risque $\alpha = 0{,}05$.

$$n \geqslant \frac{1}{4 \times 0{,}05 \times 0{,}02^2} = 12500.$$

9. Erreurs fréquentes

À éviter

- Oublier le carré dans δ^2.
- Utiliser V au lieu de V/n pour une moyenne.
- Croire que la borne est une probabilité exacte.
- Oublier que n doit être un entier.
- Confondre $|X-\mu| < \delta$ et $|X-\mu| \geqslant \delta$.
- Dire que la loi des grands nombres donne une égalité certaine.

10. Phrase bilan

À retenir

La variance mesure la dispersion. Bienaymé-Tchebychev majore les grands écarts. Pour une moyenne d'échantillon, la variance devient V/n, donc les grands écarts deviennent de moins en moins probables. C'est l'idée de la loi des grands nombres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés.
Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants)